



Politechnika Wrocławska

**DZIEDZINA:** nauk inżynieryjno-technicznych

**DYSCYPLINA:** automatyka, elektronika, elektrotechnika i technologie kosmiczne

## ROZPRAWA DOKTORSKA

### **Estymacja częstotliwości metodami interpolacji widma dla okien czasowych GMSD**

Mgr inż. Adam Matusiak

Promotor:

prof. dr hab. inż. Józef Borkowski

Słowa kluczowe: estymacja częstotliwości, interpolacja widma, okna czasowe GMSD, zakłócenia harmoniczne

WROCŁAW 2023

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Wprowadzenie</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>Metody estymacji częstotliwości i obszary zastosowań</b>	<b>12</b>
2.1	Wprowadzenie do rozdziału	12
2.2	Metody estymacji częstotliwości	12
2.2.1	Ograniczenie Craméra-Rao	12
2.2.2	Przegląd metod estymacji częstotliwości	13
2.3	Obszary zastosowań metod estymacji częstotliwości	20
2.3.1	Przegląd obszarów zastosowań	20
2.3.2	Pomiar synchronofazora	20
2.3.3	Metody estymacji częstotliwości w wyznaczaniu synchronofazora	22
<b>3</b>	<b>Metody interpolacji widma</b>	<b>24</b>
3.1	Wprowadzenie do rozdziału	24
3.2	Sygnal wieloczęstotliwościowy i jego widmo	28
3.2.1	Model sygnału wieloczęstotliwościowego	28
3.2.2	Dyskretna transformacja Fouriera	29
3.2.3	Dyskretnoczasowa transformacja Fouriera	29
3.2.4	Widmo sygnału wieloczęstotliwościowego	29
3.3	Redukcja efektu przecieku widma za pomocą okien czasowych	30
3.3.1	Okno prostokątne	30
3.3.2	Okna z bazą kosinusową	30
3.4	Interpolacja widma DFT	32
3.4.1	Metody interpolacji widma	32
3.4.2	Metoda uzupełniania zerami	33
3.4.3	Interpolacja funkcjami uniwersalnymi	33
3.4.4	Metoda najmniejszych kwadratów w interpolacji widma DFT	33
3.4.5	Metoda liniowej interpolacji LIDFT	33
3.4.6	Metody IpDFT z bezpośrednią formułą interpolacyjną	34
3.5	Metody IpDFT służące do estymacji częstotliwości sygnału złożonego z pojedynczej składowej zespolonej	35
3.5.1	Widmo sygnału złożonego z pojedynczej oscylacji zespolonej	35
3.5.2	Estymatory dwupunktowe	36
3.5.3	Metody wielopunktowej IpDFT	39
3.6	Eliminacja składowej sprzężonej	43
3.6.1	Widmo rzeczywistego sygnału sinusoidalnego	43
3.6.2	Formuła interpolacyjna dla okien MSD i GMSD	45

3.6.3	Inne metody IpDFT ograniczające wpływ składowej sprzężonej z bezpośrednią formułą interpolacyjną . . . . .	47
3.6.4	Metody pośrednie eliminujące wpływ składowej sprzężonej . . . . .	48
3.7	Eliminacja wpływu innych składowych w sygnale . . . . .	51
3.7.1	Składowa stała . . . . .	51
3.7.2	Składowe harmoniczne . . . . .	52
3.7.3	Eliminacja wpływu innych składowych częstotliwościowych . . . . .	54
3.8	Zestawienie właściwości metod interpolacji widma DFT . . . . .	55
3.8.1	Porównanie jakościowe omówionych metod interpolacji widma DFT . . . . .	55
3.8.2	Sposób uwzględnienia przecieku widma w interpolacji . . . . .	55
3.8.3	Struktura obliczeniowa metod interpolacji widma . . . . .	56
3.8.4	Widmo sygnału w metodach interpolacji . . . . .	57
3.8.5	Nowe metody interpolacji widma wykorzystujące okna GMSD . . . . .	58
<b>4</b>	<b>Nowa rodzina metod IpDFT dla okien czasowych GMSD</b>	<b>61</b>
4.1	Wprowadzenie do rozdziału . . . . .	61
4.2	Widmo okien czasowych GMSD . . . . .	62
4.3	Widmo pojedynczej oscylacji zespolonej dla okien GMSD i dwupunktowa formuła IpDFT . . . . .	63
4.4	Widmo sygnału sinusoidalnego dla okien GMSD i trzypunktowa formuła IpDFT . . . . .	65
4.5	Widmo rzeczywistego sygnału sinusoidalnego zakłóconego harmoniczną dla okien GMSD i pięciopunktowa formuła IpDFT . . . . .	70
4.5.1	Metoda pięciopunktowa dla okien GMSD . . . . .	70
4.5.2	Zależności pięciopunktowe dla pojedynczej oscylacji zespolonej . . . . .	70
4.5.3	Pięciopunktowa formuła interpolacyjna . . . . .	75
4.5.4	Algorytm estymacji częstotliwości z użyciem nowych metod na przykładzie metody pięciopunktowej . . . . .	77
<b>5</b>	<b>Analiza dokładności nowych metod IpDFT wykorzystujących okna czasowe GMSD</b>	<b>79</b>
5.1	Wprowadzenie do rozdziału . . . . .	79
5.2	Kryterium oceny estymatorów . . . . .	80
5.3	Metoda dwupunktowa dla okien GMSD . . . . .	82
5.3.1	Estymacja częstotliwości dla pojedynczej oscylacji zespolonej . . . . .	82
5.3.2	Porównanie z wybraną metodą bezpośrednią . . . . .	86
5.3.3	Rzeczywisty sygnał sinusoidalny i wpływ składowej sprzężonej na dokładność estymacji . . . . .	88
5.3.4	Rzeczywisty sygnał sinusoidalny zakłócony harmonicznymi . . . . .	89
5.4	Metoda trzypunktowa GMSD . . . . .	93
5.4.1	Estymacja częstotliwości dla pojedynczej oscylacji rzeczywistej . . . . .	93
5.4.2	Porównanie z wybraną metodą z bezpośrednią eliminacją wpływu składowej sprzężonej . . . . .	98
5.4.3	Analiza wpływu zakłóceń harmonicznymi . . . . .	101
5.5	Metoda pięciopunktowa GMSD . . . . .	104
5.5.1	Estymacja częstotliwości dla sygnału zakłóconego pojedynczą harmoniczną . . . . .	104
5.6	Wyniki eksperymentalne . . . . .	119

<b>6 Podsumowanie</b>	<b>122</b>
<b>A Lista publikacji autora</b>	<b>127</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>128</b>

# Estymacja częstotliwości metodami interpolacji widma dla okien czasowych GMSD

Adam Matusiak

## Streszczenie

Estymacja częstotliwości jest zagadnieniem podstawowym dla wielu dziedzin techniki i stanowi kluczowy element realizacji wielu praktycznych systemów. Klasa metod interpolowanej DFT (ang. *interpolated Discrete Fourier Transform*) pozwala na eliminację ograniczeń klasycznego podejścia analizy sygnału z wykorzystaniem prążków DFT, które ujawniają się w przypadku, gdy badany sygnał nie jest zsynchronizowany z oknem pomiarowym (próbki niekoherentne). Niniejsza praca skupia się na sposobie uzyskania i analizie estymatorów wykorzystujących interpolację prążków widma DFT dla uogólnionej postaci okien czasowych maksymalnego opadania listków bocznych, tj. okien GMSD (ang. *Generalized Maximum Sidelobe Decay Windows*). Proponowane w niniejszej pracy metody eliminują błąd wynikający z obecności w sygnale składowych zakłócających: składowych oddalonych ze względu na wykorzystanie okien czasowych GMSD oraz składowej sprzężonej i pojedynczej składowej harmonicznej niskiego rzędu ze względu na użycie nowych formuł interpolacyjnych, nawet dla krótkich czasów pomiaru.

W pierwszych dwóch rozdziałach niniejszej pracy nakreślona zostaje tematyka estymacji częstotliwości w kontekście wykorzystania przykładowych metod w praktycznych systemach czasu rzeczywistego. W rozdziale trzecim przedstawione zostają podstawy teoretyczne dla metod interpolacji widma DFT oraz bardziej szczegółowa analiza dostępnych metod wraz ze wskazaniem kluczowych cech opisywanych algorytmów, zakończona podsumowaniem jakościowym. W rozdziale czwartym wyprowadzone zostają równania nowych metod interpolacji widma: dwupunktowej, trzypunktowej oraz pięciopunktowej GMSD umożliwiających poprawę dokładności estymacji przez eliminację wpływu obecności zakłócających składowych widmowych. Są to kolejno: składowe oddalone, składowa sprzężona i pojedyncza składowa harmoniczna niskiego rzędu. W rozdziale zostaje także wprowadzony przykładowy opis implementacji proponowanych algorytmów. W rozdziale piątym została przedstawiona analiza dokładności uzyskanych estymatorów z wykorzystaniem badań symulacyjnych wraz z porównaniem do wybranych metod. W rozdziale zamieszczony jest opis praktycznego systemu, który realizuje proponowane algorytmy wraz z analizą złożoności obliczeniowej i czasów wykonania. Praca zakończona jest podsumowaniem w rozdziale szóstym.

# **Frequency estimation with spectrum interpolation and GMSD time windows**

**Adam Matusiak**

## **Abstract**

Frequency estimation is a fundamental issue in many fields of technology and is a key element in the implementation of many practical systems. The interpolated discrete Fourier transform (IpDFT) class eliminates the limitations of the classical DFT-based approach to signal analysis, which become apparent when the signal under study is out of sync with the measurement window (incoherent sampling). This paper focusses on how to obtain and analyze estimators using interpolation of the DFT spectrum for generalized maximum sidelobe decay time windows, i.e., GMSD windows. The methods proposed in this thesis eliminate the error due to the presence of interfering components in the signal: long-range leakage due to the use of GMSD time windows, and the conjugate component and the single low-order harmonic component due to the use of new interpolation formulas, even for short measurement times.

The first two chapters of the thesis outline the topic of frequency estimation in the context of using example methods in practical real-time systems. The third chapter presents the theoretical basis of DFT spectrum interpolation methods and a more detailed analysis of the available methods with an indication of the key features of the described algorithms, concluding with a qualitative summary. The fourth chapter derives the equations of the new spectrum interpolation methods: two-point, three-point and five-point GMSD methods, which allow to improve the accuracy of estimation by eliminating the influence of the presence of interfering spectral components. These are, in turn, the long-range leakage, the conjugate component, and the single low-order harmonic component. The chapter also presents an example description of the implementation of the proposed algorithms. The fifth chapter presents an analysis of the accuracy of the obtained estimators using simulation studies, along with a comparison to selected methods. The chapter includes a description of a practical system implementing the proposed algorithms along with an analysis of computational complexity and execution times. The thesis concludes with a summary in chapter six.

# Wykaz wybranych oznaczeń i terminów

## Sygnal wieloczęstotliwościowy

- $x(n)$  – dyskretny model sygnału wieloczęstotliwościowego,
- $A, \varphi, f$  – amplituda, faza i częstotliwość pojedynczej składowej sinusoidalnej,
- $N, T, f_s$  – liczba próbek sygnału, okres próbkowania, częstotliwość próbkowania,
- $\lambda$  – częstotliwość unormowana względem długości okna pomiarowego  $NT$ :  $\lambda = fNT$ ,
- oscylacja sinusoidalna – składowa postaci  $x_h(n) = A_h \sin(2\pi\lambda_h n/N + \varphi_h)$ , gdzie indeks  $h$  oznacza numer składowej,
- $B$  – amplituda zespolona pojedynczej składowej zespolonej,
- oscylacja zespolona – składowa postaci  $x_l(n) = B_l \exp(j2\pi\lambda_l n/N)$ , gdzie indeks  $l$  oznacza numer składowej,
- składowa podstawowa – składowa oznaczona indeksem  $h = 1$  lub  $l = 1$ ,
- $\lambda_0$  – częstotliwość unormowana składowej podstawowej (w tekście założono także, że  $\lambda_0 = \lambda_1$ ),
- $s(n)$  – addytywny szum biały z rozkładem normalnym i wariancją  $\sigma^2$ .

## Widmo sygnału wieloczęstotliwościowego

- $w(n)$  – dyskretna funkcja okna czasowego,
- $X_k$  –  $k$ -ty prążek DFT sygnału  $x(n)$  z nałożonym oknem czasowym  $w(n)$ ,
- $X_k^{(\lambda_l)}$  – składnik wartości prążka  $X_k$  wynikający z występowania oscylacji zespolonej o częstotliwości  $\lambda_l$ ,
- $X(\lambda)$  – ciągła funkcja DtFT reprezentująca widmo sygnału  $x(n)$  z nałożonym oknem czasowym  $w(n)$ ,
- $W(\lambda)$  – ciągła funkcja DtFT okna czasowego  $w(n)$ ,
- $\Delta^n X_k$  – współczynnik różnicy skończonej  $n$ -tego stopnia dla prążka  $X_k$ .

## Wykorzystywana notacja matematyczna

- $j$  – jednostka urojona,
- $\text{Re}\{\cdot\}, \text{Im}\{\cdot\}$  – część rzeczywista i urojona liczby zespolonej,
- $\mathbf{a}, \mathbf{A}$  – wektor, macierz.

# Rozdział 1

## Wprowadzenie

Zagadnienie estymacji częstotliwości jest fundamentalnym problemem dla szerokiego zakresu zastosowań, dotyczy to m.in.: algorytmów stosowanych w układach energoelektronicznych, technice radarowej, aparaturze biomedycznej czy telekomunikacji[34], [35]. Częstotliwość jest wielkością dobrze zdefiniowaną dla funkcji sinusoidalnej, która stanowi szczególnie ważną charakterystykę opisującą podstawowe zjawiska występujące w przyrodzie, m.in. jest ogólnym rozwiązaniem podstawowego równania różniczkowego opisującego ruch harmoniczny. Jednocześnie wyłania się w przypadku opisu nawet bardzo złożonych systemów, takich jak np. cykle biologiczne człowieka[4]. Ze względu na precyzję i prostotę w ujęciu modelowania matematycznego oraz bezpośrednią przystępność intuicji, częstotliwość oscylacji sinusoidalnej jest popularnym parametrem służącym określaniu właściwości badanego systemu. W kontekście badania natury zmienności sygnałów, w tym powtarzalności danego zjawiska, rozwinięte zostały narzędzia analizy fourierowskiej, w szczególności dyskretna transformacja Fouriera (DFT, ang. *Discrete Fourier Transform*) dla przypadku wykorzystania w systemach cyfrowych. Przykładem tego rodzaju sygnałów są sygnały okresowe, dla których istnieje reprezentacja szeregu Fouriera. W przypadku sygnałów rejestrowanych w praktycznych systemach, uzyskane w pomiarze próbki reprezentują sygnał, którego widmo różni się od zakładanego modelu pojedynczej oscylacji – kształt uzyskanej charakterystyki zmienia się w czasie, występuje więcej niż jedno maksimum widma oraz zmienia się jego położenie. Źródłem wskazanych efektów są m.in.: niekompletność przyjętego modelu w stosunku do badanego sygnału, niestacjonarność sygnału (zmiana parametrów w czasie) oraz to, że jest on obciążony zakłóceniami losowymi oraz deterministycznymi, np. obecnością harmonicznych. W wielu przypadkach faktyczna natura badanego zjawiska, pomimo obecnych różnego rodzaju zniekształceń, nadal pozostaje fundamentalnie związana z sygnałem sinusoidalnym, a klasyczne narzędzia analizy widmowej uzupełniane są nowymi technikami i z tego względu wciąż zachowują swoją użyteczność. W dalszym ciągu zachodzi potrzeba wyznaczenia częstotliwości maksimum widma sygnału, które reprezentują rzeczywiste, istotne parametry badanego systemu. W tym kontekście korzystne może być wprowadzenie do modelu parametru reprezentującego częstotliwość sygnału sinusoidalnego, dla którego uzyskana wartość najlepiej reprezentuje położenie szczytu charakterystyki widmowej[34]. W przypadku stwierdzenia obecności wielu komponentów częstotliwościowych, analiza tego rodzaju może być rozszerzona dla *sygnału wieloczęstotliwościowego*, tj. składającego się z wielu składowych sinusoidalnych[42].

Konsekwencją ciągle rosnącej złożoności systemów wykorzystujących pomiary częstotliwości jest zapotrzebowanie na efektywne kosztowo układy pomiarowe, które będą



łatwe do wykonania i wdrożenia. Wspomniane kryteria nakładają nowe wymagania co do charakterystyki algorytmów estymacji, oprócz samej dokładności pomiaru. Przykładem mogą być węzły pomiarowe w rozproszonej sieci dystrybucyjnej energii elektrycznej [138]. Część z obszarów zastosowań, które zostały wymienione wyżej wymaga realizacji pomiarów w czasie rzeczywistym, nakładając przy tym dodatkowe kryterium w procesie doboru algorytmu estymacji. W takim przypadku zastosowana metoda musi charakteryzować się względnie niską złożonością obliczeniową oraz dobrze zdefiniowanym czasem wykonania dostarczonej implementacji. Stąd też stosowane są zwykle specjalistyczne układy do pracy z systemami o twardych ograniczeniach czasowych (ang. *hard time constraints*) i zawierają się w grupie systemów wbudowanych. Takie układy cechują się z kolei ograniczonymi zasobami sprzętowymi, co może nakładać kolejne wymagania względem wyboru algorytmu estymacji. Kolejnym aspektem doboru algorytmów estymacji częstotliwości, dotyczącym specyfikacji użytej platformy sprzętowej, jest struktura obliczeniowa algorytmu i możliwości dotyczące implementacji zastosowanej metody w sprzęcie. Dotyczy to możliwości użycia dostępnych specjalistycznych układów sprzętowych, takich jak akceleratory, koprocesory czy rdzenie procesora sygnałowego pracujące równolegle do procesora głównego w układach SoC (ang. *system on a chip*). Dla wymienionych kryteriów doboru algorytmu estymacji znakomicie wpasowuje się charakterystyka metod opartych na dyskretnej transformacji Fouriera. Gwarantują one łatwą implementację, niską złożoność obliczeniową i wystarczającą dokładność dla części zastosowań w kontraście do bardziej złożonych, czasowych metod parametrycznych takich jak metody Prony'ego, MUSIC czy ESPRIT [49]. Szeroko wykorzystywany algorytm obliczania szybkiej transformacji Fouriera FFT (ang. *Fast Fourier Transform*) gwarantuje szybkie wykonanie ze złożonością obliczeniową wynoszącą  $O(N \log_2 N)$ , gdzie  $N$  oznacza liczbę próbek sygnału. Istotnym faktem wydaje się być także to, że istnieje wiele sprawdzonych implementacji algorytmu FFT, które są zwykle optymalizowane pod kątem używanej platformy sprzętowej. Przykładem specjalizowanych, efektywnych kosztowo systemów wbudowanych są procesory sygnałowe lub mikrokontrolery ze specjalizowanymi instrukcjami DSP przyspieszającymi wykonanie algorytmu oraz sprzętowe koprocesory przeznaczone do obliczania procedury FFT, np. procesor Texas Instruments TMS320C5515 [124]. Istnieją także implementacje sprzętowe z użyciem układów FPGA (ang. *Field-programming Gate Array*), także w kontekście zastosowania w połączeniu z algorytmami interpolowanej DFT [151].

Analiza częstotliwościowa z wykorzystaniem przekształcenia DFT jest obciążona błędami wyznaczania parametrów sygnału ze względu na występowanie zjawiska przecieku widma oraz efektu zafalowania. Pierwszy z tych problemów dotyczy obecności zakłóceń w postaci innych, niezsynchronizowanych z oknem pomiarowym składowych w sygnale, których obecność wpływa na wartość uzyskanych prążków DFT. Błąd związany z efektem zafalowania wynika natomiast z dyskretnego charakteru widma DFT i występuje, gdy badana składowa nie jest zsynchronizowana z oknem pomiarowym. Wpływ przecieku widma składowych może być eliminowany przy pomocy nakładania okien czasowych na mierzony sygnał. Technika ta staje się jednak nieskuteczna w przypadku składowych położonych bliżej w widmie względem prążków DFT wykorzystywanych w estymacji parametrów. Metodami pozwalającymi efektywnie zredukować błąd związany z występowaniem obu tych zjawisk są metody interpolowanej DFT (występujące w literaturze także jako IpDFT, ang. *interpolated DFT*). Zastosowanie opisywanej metody pozwala na rozszerzenie klasycznego podejścia i stanowi główny przedmiot zainteresowania w niniejszej pracy. Estymatory IpDFT wykorzystują informację zawartą w kilku sąsiadujących ze sobą prążkach DFT do wyznaczenia parametrów składowych widmowych. Najczęściej obliczenia zwią-

zane z algorytmami IpDFT stanowią jedynie ułamek czasu wykonania algorytmu FFT, co pozwala małym kosztem zwiększyć efektywność pomiaru [36]. Z tego względu metody interpolowanej DFT mogą znacząco poprawić dokładność wyznaczania częstotliwości niskim kosztem w już istniejących systemach pomiarowych, w których wykorzystywane są obliczenia FFT. Warto także zauważyć, że spośród metod wykorzystujących prążki DFT do estymacji częstotliwości, metody interpolowanej DFT często oferują gotową formułę algebraiczną składającą się z zaledwie kilku wartości DFT, przez co implementacja w systemie staje się bardzo prosta. Większość dostępnych w literaturze metod zakłada wykorzystanie modelu pojedynczej oscylacji zespolonej przy jednoczesnym założeniu, że wpływ innych składowych widmowych na wartość użytych w estymacji prążków DFT jest pomijalny. Taka estymacja jest rzeczywiście efektywna w przypadku dłuższego okna pomiarowego obejmującego wiele okresów sygnału wejściowego, dla którego nałożone okno czasowe pozwala na eliminację wpływu składowych oddalonych. Jednakże, gdy rozpatrywane są sygnały przyjmujące wartości rzeczywiste oraz takie, w których występują zakłócenia harmoniczne, skrócony czas pomiaru powoduje, że wpływ składowych sprzężonych oraz składowych harmonicznych niskiego rzędu na wartości wykorzystywanych prążków DFT staje się znaczący. Z tego względu dokładność estymatorów uzyskanych na podstawie modelu składającego się z pojedynczej oscylacji drastycznie maleje.

Niniejsza rozprawa wprowadza nową klasę estymatorów częstotliwości opartych na technice interpolacji prążków DFT z użyciem uogólnionej postaci okien maksymalnego opadania listków bocznych GMSD (ang. *Generalized Maximum Sidelobe Decay*). Głównym celem osiąganym przez nową klasę metod jest eliminacja obciążenia estymatorów wynikającego z obecności w widmie sygnału oddalonych komponentów częstotliwościowych, z wpływu obecności składowej sprzężonej oraz z wpływu obecności składowych harmonicznych niskiego rzędu poprzez wykorzystanie rozszerzonego modelu sygnału w procedurze wyprowadzania formuły interpolacyjnej. W kolejnych rozdziałach rozprawy znajduje się opis sposobu uzyskania bezpośrednich formuł interpolacyjnych metod wykorzystujących okna GMSD, weryfikacja poprawności uzyskanych zależności oraz ocena efektywności ich zastosowania. Wprowadzenie nowych metod poprzedza przegląd dostępnej literatury w zakresie estymacji częstotliwości, także w kontekście ich zastosowania, ze szczególnym naciskiem na omówienie metod interpolowanej DFT.

## **Cel i teza pracy**

Celem niniejszej rozprawy jest zbadanie możliwości zastosowania okien czasowych GMSD do uzyskania nowych metod interpolacji widma, które zakładają:

- ograniczenie sumarycznego wpływu na dokładność estymacji obecności wielu składowych widmowych znajdujących się w znacznym oddaleniu od wykorzystywanych wartości widma,
- ograniczenie wpływu na dokładność estymacji obecności składowej sprzężonej, także dla krótkich czasów pomiaru,
- ograniczenie wpływu na dokładność estymacji obecności składowych harmonicznych niskiego rzędu, także dla krótkich czasów pomiaru,
- estymację nieiteracyjną, która ograniczenie wpływu obecności składowych zakłócających na dokładność estymacji realizuje bezpośrednio w formule interpolacyjnej.

Praca ma także na celu przeprowadzenie analizy dokładności tak scharakteryzowanych metod interpolacji widma w zakresie redukcji obciążenia wynikającego z obecności w sygnale zakłóceń w postaci składowych widmowych wraz z porównaniem do wybranych dostępnych referencyjnych metod. W niniejszej rozprawie przyjęto następującą tezę badawczą:

*Interpolacja widma DFT z wykorzystaniem okien czasowych GMSD pozwala na uzyskanie nowych nieiteracyjnych metod estymacji częstotliwości charakteryzujących się krótkim czasem wykonania wraz ze znaczącym zwiększeniem dokładności estymacji (o rząd wielkości lub więcej) dla krótkiego czasu pomiaru i w obecności zakłóceń harmonicznym względem dotychczasowych nieiteracyjnych metod interpolacji widma.*

## Rozdział 2

# Metody estymacji częstotliwości i obszary zastosowań

### 2.1 Wprowadzenie do rozdziału

Celem rozdziału jest nakreślenie problemu estymacji częstotliwości w kontekście wykorzystywanych metod i obszarów zastosowań. W rozdziale 2.2 zawarty został przegląd dostępnych metod estymacji częstotliwości wraz z krótką charakterystyką wybranych metod, dla których, zdaniem autora, metody interpolacji widma stanowią potencjalną alternatywę (dla pewnego zakresu zastosowań). Przedstawione zestawienie wraz z klasyfikacją mają charakter przekrojowy i zostały wprowadzone w celu nadania kontekstu dla omawianych w dalszych rozdziałach metod interpolacji widma. Opisywane metody, oprócz samej estymacji częstotliwości, często służą także do wyznaczenia innych parametrów sygnału: m. in. amplitudy i fazy składowych sygnału wieloczęstotliwościowego. Dla dużej części z tych metod, estymacja częstotliwości stanowi wyjściową informację pozwalającą na wyznaczenie wartości innych parametrów sygnału. W takim przypadku dokładność wyznaczenia częstotliwości bezpośrednio przekłada się na efektywność wyznaczenia pozostałych parametrów. Stąd podczas opisywania metod estymacji parametrów nacisk jest położony przede wszystkim na aspekcie estymacji częstotliwości.

W rozdziale 2.3 przedstawione zostały przykłady obszarów zastosowań metod estymacji częstotliwości ze szczególnym uwzględnieniem przypadków wykorzystania metod interpolacji widma. Pomiary częstotliwości w systemie elektroenergetycznym stały się w ostatnim czasie jednym z głównych obszarów zastosowań, dla których przedstawiane są nowe metody interpolacji widma. Z tego powodu rozdział jest zakończony poszerzonym opisem przypadku zastosowania metod estymacji częstotliwości do wyznaczania wartości fazona prądu i napięcia wraz ze wskazaniem konkretnych przykładów stosowanych w tym obszarze metod.

### 2.2 Metody estymacji częstotliwości

#### 2.2.1 Ograniczenie Craméra-Rao

Efektywna ewaluacja estymatorów częstotliwości na poziomie statystycznym może być realizowana przez wykorzystanie narzędzi pozwalających na określenie stopnia wykorzystania informacji obecnej w zarejestrowanym sygnale. Takim powszechnie używanym narzędziem statystycznym jest ograniczenie Craméra-Rao, które określa minimalną wariancję

możliwą do uzyskania przez optymalny estymator nieobciążony [42], [108], [146].

W przypadku estymacji parametrów oscylacji zespolonej zakłóconej addytywnym szumem białym  $s(n)$  z rozkładem normalnym (AWGN, ang. *Additive White Gaussian Noise*) i wariancją  $\sigma^2$  tj. w przypadku modelu sygnału:

$$x(n) = Be^{j2\pi n\lambda_0/N + j\varphi} + s(n) \quad (2.1)$$

Rife i Boorstyn wyznaczyli ograniczenie Craméra-Rao dla przypadku, gdy nie są znane wszystkie trzy parametry  $B$ ,  $\varphi$  i  $\lambda_0$  [150]:

$$CRB_{\lambda_0} = \frac{3N(SNR)^{-1}}{2\pi^2(N^2 - 1)} \quad (2.2)$$

Powyższe ograniczenie dotyczy estymacji częstotliwości znormalizowanej  $\lambda_0$ , definiowanej jako  $\lambda = fNT$ , gdzie  $f$  oznacza częstotliwość sygnału wyrażoną w Hz. Stosunek sygnał-szum SNR używany w powyższym równaniu zdefiniowany jest jako:

$$SNR = \frac{B^2}{\sigma^2} \quad (2.3)$$

Posługując się ograniczeniem Craméra-Rao możliwe jest porównywanie nieobciążonych estymatorów częstotliwości w kontekście możliwości otrzymania najlepszego przypadku wariancji.

Dostępna jest także analiza ograniczenia Craméra-Rao dla przypadku innych sygnałów: dla rzeczywistej sinusoidy w [73] oraz sinusoidy zakłóconej harmonicznymi [167]. W [21] zostały przedstawione zależności opisujące ograniczenie Craméra-Rao (także dla przypadku asymptotycznego  $\lambda \ll N$ ) dla sygnałów okresowych. Wszystkie opisywane zależności przyjmują wartości większe niż dla przypadku ograniczenia Craméra-Rao (2.2) dla estymacji częstotliwości oscylacji zespolonej. Przykładowo ograniczenie uzyskane w [73] dla estymacji częstotliwości dla dwóch oscylacji zespolonych pokazuje, że maksymalna wartość ograniczenia dla różnicy estymowanych częstotliwości  $|\lambda_1 - \lambda_2| > 1$  bin nie przekracza dwukrotnej wartości ograniczenia Craméra-Rao dla przypadku pojedynczej oscylacji zespolonej (2.2) oraz dla  $|\lambda_1 - \lambda_2| \gg 1$  dąży do tej wartości.

## 2.2.2 Przegląd metod estymacji częstotliwości

Dostępnych jest wiele metod estymacji częstotliwości, które znacząco różnią się między sobą pod względem dokładności pomiaru, złożoności obliczeniowej i odporności na zakłócenia losowe oraz deterministyczne. Na często wyróżniane kryteria klasyfikacji składają się: określenie domeny estymacji (metody czasowe, częstotliwościowe lub czasowo-częstotliwościowe); rozróżnienie ze względu na wykorzystywany model (modelowanie deterministyczne oraz stochastyczne) oraz podział na metody *parametryczne* lub *nieparametryczne*. Przykładem metody wykorzystującej modelowanie deterministyczne jest wykorzystanie pojedynczego prążka DFT (lub pojedynczej wartości widma ciągłego dyskretnej transformacji Fouriera DtFT) do wyznaczenia parametrów składowej oscylacji. Z kolei przykładem metod wykorzystujących modelowanie stochastyczne są metody estymacji widmowej takie jak periodogram i jego warianty. Klasyczne metody nieparametryczne (np. z użyciem periodogramu) realizują analizę widma badanego sygnału w celu uzyskania informacji o gęstości mocy sygnału zawartego w wąskim zakresie pasma. Z kolei metody parametryczne zakładają użycie sparametryzowanego matematycznego modelu do opisu widma, co pozwala na redukcję problemu estymacji widma do problemu

estymacji parametrów w ramach zakładanego modelu[163]. Metody parametryczne z reguły pozwalają na uzyskanie dokładnych wyników i wykazują wysoką rozdzielczość w rozróżnianiu sąsiadujących ze sobą komponentów częstotliwościowych występujących w widmie. Dokładność estymacji jest jednak uwarunkowana koniecznością dobrego zdefiniowania modelu sygnału, np. precyzyjnego ustalenia liczby składowych sinusoidalnych występujących w sygnale.

Estymatory definiowane w dziedzinie czasu cechują się zwykle wysoką dokładnością pomiaru, ale jednocześnie wysoką złożonością obliczeniową algorytmu. Z tego względu metody czasowe mogą nie sprawdzać się w systemach z ograniczeniami czasowymi. Z kolei estymatory widmowe mogą charakteryzować się wielokrotnie szybszym czasem wykonania zachowując wymaganą dokładność i mogą stanowić dobrą alternatywę dla części zastosowań.

### Przegląd wybranych metod estymacji częstotliwości

Niniejsza praca skupia się w głównej mierze na metodach estymacji wykorzystujących prążki DFT lub wartości widma ciągłego DtFT. Do tej grupy metod można zaliczyć m.in. metody wykorzystujące aproksymację średniokwadratową[128], metody wykorzystujące interpolację funkcjami uniwersalnymi[1], metody liniowej interpolacji LIDFT wykorzystujące aproksymację okręgu jednostkowego [42], oraz metody interpolowanej DFT (IpDFT, ang. *interpolated DFT*)[146]. Powyżej wymienione metody stanowią główny temat kolejnego rozdziału, który zawiera ich opis, ze szczególnym uwzględnieniem dostępnych metod interpolacji widma.

Poniżej przedstawiono bardziej szczegółowy opis trzech wybranych grup metod estymacji częstotliwości spoza już wymienionych:

- **Estymatory wykorzystujące metodę największej wiarygodności** (MLE, ang. *maximum likelihood estimators*)[68], [146].

W przypadku estymacji częstotliwości pojedynczej oscylacji zespolonej oraz białego szumu gaussowskiego, Rife i Boorstyn w [150] pokazują, że znalezienie maksimum funkcji periodogramu realizuje założenia metody największej wiarygodności:

$$\hat{\lambda}_{0_{ML}} = \arg \max_{\lambda} \left\{ \frac{1}{N} Y(\lambda) \right\} \quad (2.4)$$

gdzie  $Y(\lambda)$  to funkcja widmowej gęstości mocy zdefiniowana jako:

$$Y(\lambda) = \left| \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j2\pi n\lambda/N} \right|^2 \quad (2.5)$$

Analiza częstotliwościowa z użyciem periodogramu jest nieparametryczną metodą estymacji widma[163]. W tym przypadku zadanie znalezienia maksimum periodogramu realizowane jest metodami numerycznymi, przykładowo przy pomocy algorytmów zawężania siatki (ang. *grid-search*)[169] oraz innych technik iteracyjnych, m.in. z wykorzystaniem metody Newtona-Raphsona. Z tego względu rozwiązanie problemu zdefiniowanego za pomocą równania (2.4) charakteryzuje się wysoką złożonością obliczeniową, m.in. ze względu na występowanie wielu ekstremów lokalnych periodogramu, a sama funkcja jest nieliniowa. Ważnym aspektem stosowanych metod są także problem zbieżności i rozdzielczości[144]. Jednakże w kontekście statystycznym, jest to analiza optymalna dla wystarczająco długich sekwencji

próbek, a otrzymany estymator jest asymptotycznie nieobciążony i osiąga wartość ograniczenia Craméra-Rao[108]. W przypadku gdy różnica częstotliwości dwóch oscylacji zawartych w sygnale jest mniejsza niż odwrotność czasu trwania pomiaru, metoda maksymalizacji periodogramu przestaje być estymatorem MLE. Wtedy metoda największej wiarygodności prowadzi do problemu nieliniowej metody najmniejszych kwadratów[107]. Metody MLE często dzielą przetwarzanie na część zgrubnej estymacji (ang. *course estimation*) oraz części wyszukiwania dokładnego założonej funkcji wiarygodności (ang. *fine estimation*)[164]. Dostarczenie wstępnej estymaty z wysoką dokładnością może być konieczne dla efektywnej realizacji stosowanych algorytmów. Estymacja w przypadku niespełnienia tego kryterium jest traktowana jako obserwacja odstająca (ang. *outliers*) i jej występowanie wiąże się z graniczną wartością SNR, dla której błąd MSE estymacji znacząco rośnie[150].

- **Estymatory wykorzystujące techniki modelowania transmitancyjnego**, w tym wykorzystujące modelowanie AR (ang. *autoregressive*), MA (ang. *moving average*) i połączone metody ARMA[163].

W tej grupie estymatory realizowane są przy pomocy modelowania transmitancji systemu liniowego reprezentującej badany sygnał. Model  $y(n)$  badanego sygnału jest wyjściem liniowego filtru cyfrowego, którego pobudzeniem jest biały szum  $x(n)$  o wariancji  $\sigma^2 = 1$ :

$$y(n) + \sum_{k=1}^p a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^q b_k x(n-k) \quad (2.6)$$

oraz którego transmitancja przedstawia się jako:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^q b_k z^{-k}}{\sum_{k=1}^p a_k z^{-k}} \quad (2.7)$$

Celem modelowania jest minimalizacja błędu w sensie średniokwadratowym pomiędzy badanym sygnałem a modelem  $y(n)$ . Podstawową trudnością dla tego rodzaju metod jest przyjęcie odpowiedniego modelu transmitancji, tj. rzędu wielomianu mianownika transmitancji (metody AR), rzędu wielomianu licznika (metody MA) lub obu (metody ARMA). Modelowanie parametryczne znalazło szerokie zastosowanie w metodach estymacji widma, ale także jest wykorzystywane w metodach estymacji parametrów sygnału wieloczęstotliwościowego.

Przykładem iteracyjnej metody estymacji częstotliwości wywodzącej się z omawianej grupy są estymatory wykorzystujące adaptacyjne filtry wąskopasmowe (lub wycinające, ang. *adaptive notch filters*). Zmiana charakterystyki takiego filtru jest realizowana przez parametryzację współczynników funkcji transmitancji. Wartości tych współczynników są ściśle związane z częstotliwością wycięcia – stąd znając aktualne wartości charakterystyki znana jest także częstotliwość estymowanej sinusoidy. Filtry tego rodzaju wykorzystują modelowanie ARMA, a przykładem może być popularny filtry IIR CPZ-ANF (ang. *inifinite impulse response constrained poles and zeros*) drugiego rzędu z transmitancją[130]:

$$H_N(z) = \frac{1 + az^{-1} + z^{-2}}{1 + \rho az^{-1} + \rho^2 z^{-2}} \quad (2.8)$$

gdzie wartość  $a = -2 \cos(\omega_0)$  jest parametrem regulującym wartość częstotliwości  $a \in [-2, 2]$ , a parametr  $\rho$  określa szerokość wycinanego pasma. Innym przykładem adaptacyjnych filtrów wycinających są filtry wycinające wykorzystujące filtry wszechprzepustowe (APF-ANF, ang. *all-pass filter*)[109]. Ze względu na parametryzację współczynników filtru, konieczne jest monitorowanie stabilności w każdej iteracji. Niesie to za sobą pewne trudności w implementacji w praktycznym systemie[92]. W literaturze pojawiły się także wersje algorytmu wykazujące zbieżność w przypadku obecności harmonicznnych w sygnale[127].

Innym klasycznym przykładem metod omawianej grupy jest metoda Prony'ego[186]. W metodzie Prony'ego, która może być uważana za metodę wykorzystującą modelowanie autoregresyjne, zakładany jest model sygnału dla  $p$  próbek reprezentujących sumę  $p$  zespolonych oscylacji ( $p/2$  oscylacji rzeczywistych):

$$x(n) = \sum_{k=1}^p h_k z_k^{n-1} \quad (2.9)$$

gdzie parametry  $k$ -tej oscylacji  $h_k$  i  $z_k$  są liczbami zespolonymi, zaś argument wartości  $z_k$  zależy od szukanej częstotliwości  $f_k$  (w ogólności  $z_k$  może reprezentować oscylację tłumioną). Taka suma zespolonych oscylacji stanowi rozwiązanie ogólne jednorodnego równania różnicowego o stałych współczynnikach dla  $p$  różnych pierwiastków (model AR rzędu  $p = N$ ):

$$-a_0 y(n) = \sum_{k=1}^N a_k y(n-k), \quad a_0 = 1 \quad (2.10)$$

zaś wielomian charakterystyczny takiego równania różnicowego ma postać:

$$\varphi(z) = \prod_{k=1}^p (z - z_k) = \sum_{k=0}^p a_k z^{p-k}, \quad a_0 = 1 \quad (2.11)$$

którego pierwiastki  $z_k$  przybierają wartości parametru  $z_k$  z równania (2.9). Wektor próbek  $\mathbf{y} = [y(p+1), \dots, y(2p)]^T$  może zostać wykorzystany do wygenerowania równania macierzowego, które definiuje kolejne wartości  $y_k$  przy pomocy  $p$  próbek poprzedzających, zawartych w kolejnych wierszach macierzy  $\mathbf{T}$  i współczynników  $a_k$ , za pomocą wcześniej wprowadzonej zależności rekurencyjnej (2.10):

$$-\mathbf{y} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{a} \quad (2.12)$$

gdzie wektor współczynników  $a_k$  zdefiniowano jako  $\mathbf{a} = [a_1, \dots, a_p]^T$ . Metoda Prony'ego jest dwuetapowa. Po pierwsze, rozwiązanie powyższego układu równań liniowych ze względu na wartości wektora  $\mathbf{a}$  pozwala na znalezienie współczynników  $a_k$  wielomianu (2.11). W drugiej kolejności, znalezienie pierwiastków  $z_k$  tego wielomianu (pokrywające się z zespolonymi wartościami parametrów  $z_k$  z równania (2.9)) pozwala na bezpośrednie wyznaczenie estymat częstotliwości szukanych składowych.

Klasyczna metoda Prony'ego jest wrażliwa na szum, oraz w przypadku estymacji parametrów dużej liczby oscylacji, metoda może stać się niestabilna ze względu na złe uwarunkowania numeryczne rozwiązywanego układu równań liniowych [88]. W literaturze dostępnych jest szereg modyfikacji metody Prony'ego pozwalających



na zwiększenie jej efektywności[80]. Podstawowym środkiem wykorzystywanym w tym celu jest użycie nadokreślonego układu równań liniowych dla  $N > 2p$  i wykorzystanie zwykłej metody najmniejszych kwadratów (OLS) lub metody zupełnych najmniejszych kwadratów (TLS) do wyznaczenia współczynników wielomianu  $\varphi(z)$ [120]. Metoda matrix pencil[90], [155] stanowi alternatywną technikę względem metody Prony’ego dla problemu aproksymacji sygnału przy pomocy sumy zespolonych oscylacji. Metoda wykorzystuje rozkład na wartości osobliwe (ang. *SVD decomposition*) w celu wyznaczenia biegunów transmitancji systemu liniowego. W odróżnieniu od metody Prony’ego, metoda matrix pencil jest jednokrokowa, bardziej efektywna obliczeniowo i charakteryzuje się lepszą odpornością na szum.

- **Parametryczne metody dekompozycji macierzowych** (metody podprzestrzeni)[163].

Parametryczne metody dekompozycji macierzowych są popularną grupą metod, która pozwala na dokładną estymację parametrów wielu sinusoid w zaszumionym sygnale, nawet w przypadku małych różnic częstotliwości pomiędzy dwoma składowymi. Najbardziej znanymi metodami podprzestrzeni są: metoda Pisarenki (ang. *Pisarenko harmonic decomposition*)[142], metoda ESPRIT (ang. *Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques*)[153] oraz metoda MUSIC (ang. *Multiple Signal Classification*)[156]. Metody podprzestrzeni opierają się na analizie rozkładu macierzy próbek (lub estymaty macierzy autokorelacji  $\mathbf{R}_{xx}$ ) na wartości i wektory własne. Związane jest to z wykorzystaniem technik dekompozycji względem wartości własnych (ang. *Eigen Value Decomposition*) lub osobliwych (ang. *Singular Value Decomposition*).

Zakładając, że badany sygnał składa się z wielu składowych sinusoidalnych oraz szumu białego, rozkład macierzy autokorelacji względem wartości własnych skutkuje uzyskaniem wektorów własnych rozpinających dwie dopełniające się podprzestrzenie, sygnału oraz szumu:

$$\mathbf{R}_{xx} = \mathbf{U}_s \mathbf{\Lambda}_s \mathbf{U}_s^H + \mathbf{U}_n \mathbf{\Lambda}_n \mathbf{U}_n^H = \mathbf{U}_s \mathbf{\Lambda}_s \mathbf{U}_s^H + \sigma^2 \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \quad (2.13)$$

gdzie  $\mathbf{U}_s = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{2p}]$  to macierz zawierająca kolumnowe wektory własne  $\mathbf{u}$  związane z podprzestrzenią sygnału, zaś  $\mathbf{\Lambda}_s$  jest macierzą diagonalną zawierającą wartości własne  $\lambda_k$  dla  $k \in \{1, \dots, 2p\}$ . Macierz  $\mathbf{U}_n = [\mathbf{u}_{2p+1}, \dots, \mathbf{u}_M]$  zawiera wektory własne  $\mathbf{u}$  związane z podprzestrzenią szumu przy założeniu wykorzystania  $M$  próbek sygnału, zaś  $\mathbf{\Lambda}_n$  jest macierzą diagonalną zawierającą wartości własne  $\lambda_k$  dla  $k \in \{2p + 1, \dots, M\}$ . Operator H oznacza transpozycję ze sprzężeniem zespolonym (sprężenie hermitowskie).

Pierwsza grupa estymatorów zakłada wykorzystanie wektorów własnych znajdujących się w podprzestrzeni szumu. Znając dowolny taki wektor  $\mathbf{u}_n$  możliwe jest uzyskanie estymaty częstotliwości danej składowej zespolonej z wykorzystaniem testu warunku ortogonalności  $\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{u}_n = 0$ . W przypadku gdy dana częstość  $\Omega$ , określona dla oscylacji zespolonej  $\mathbf{e} = [e^{j\Omega \cdot 0}, \dots, e^{j\Omega(M-1)}]^T$  występuje w sygnale, iloczyn skalarny oscylacji zespolonej z wektorem własnym podprzestrzeni szumu  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{v}_n$  zeruje się, ponieważ jest ortogonalny do wektorów własnych podprzestrzeni sygnału  $\mathbf{u}_s$ . W skład tego rodzaju metod wchodzi metoda Pisarenki oraz MUSIC. Metoda Pisarenki zakłada dekompozycję macierzy autokorelacji na wartości i wektory własne dla  $p/2$  rzeczywistych składowych sinusoidalnych i  $M = p + 1$  próbek sygnału[185]. W takiej sytuacji model zakłada, że w sygnale jest zawarty

$p$  zespolonych oscylacji. Ze względu na użycie  $M = p + 1$  punktów w metodzie Pisarenki, występuje tylko jedna (najmniejsza z uzyskanych) wartość własna związana z podprzestrzenią szumu i jest równa wartości wariancji szumu  $\sigma^2$ . Okazuje się, że skojarzony z nią wektor własny  $\mathbf{u}_M = \mathbf{a}$  zawiera wartości współczynników równania różnicowego opisującego rekurencyjnie składowe sinusoidalne o szukanych częstotliwościach, stąd też z definicji  $\mathbf{R}_{xx}\mathbf{a} = \sigma^2\mathbf{a}$ . Tak uzyskane wartości współczynników stanowią jednocześnie mianownik funkcji transmitancji pewnego układu liniowego  $H(z) = \frac{1}{A(z)}$ :

$$A(z = e^{j\Omega}) = \sum_{k=1}^{2p} a(k)z^{-k} = \prod_{k=1}^{2p} (1 - e^{j\Omega_k} z^{-1}) \quad (2.14)$$

Obliczając  $2p$  zer wielomianu mianownika  $A(z)$  występujących w parach sprzężonych uzyskiwane są estymaty częstości  $\hat{\Omega}$  kolejnych składowych sinusoidalnych zawartych w sygnale. Metoda Pisarenki charakteryzuje się jednak względnie słabą odpornością na zakłócenia losowe ze względu na wykorzystanie tylko jednego wektora własnego z podprzestrzeni szumu i małej liczby próbek. Dotychczas opracowano różne zmodyfikowane warianty metody Pisarenki jak np. metody MPHD (ang. *Modified Pisarenko Harmonic Decomposition*)[119], RPHD (ang. *Reformulated Pisarenko Harmonic Decomposition*)[161] z poprawionymi właściwościami. W metodzie MUSIC i pochodnych (np. metoda EV – *EigenVector* [185]) wykorzystywanych jest więcej niż jeden wektor własny  $\mathbf{u}_k$  należący do podprzestrzeni szumu, a więc używanych jest więcej niż  $p + 1$  punktów, jak to było w przypadku metody Pisarenki. W takim przypadku maksymalizowana jest wartość tzw. *funkcji pseudowidma*. Dla przypadku metody Pisarenki wygląda ona następująco:

$$\hat{P}_{PIS}(z) = \frac{1}{|\mathbf{u}(z)^H \mathbf{a}|^2} \quad (2.15)$$

Argumenty uzyskanych maksimów powyższej funkcji wyrażają estymaty pulsacji  $z = e^{j\hat{\Omega}_k}$ . W przypadku metody MUSIC rozważane jest  $M > 2p + 1$  punktów, a więc w wyniku dekompozycji otrzymywanych jest więcej niż jeden wektor własny  $\mathbf{u}_n$ . Wobec tego funkcja *pseudowidma* przyjmuje postać:

$$\hat{P}_{MUS}(z) = \frac{1}{\sum_{k=1}^M |\mathbf{u}(z)^H \mathbf{u}_{n,k}|^2} \quad (2.16)$$

W przypadku przytaczanej wcześniej metody *Eigen Vector*, suma znajdująca się w mianowniku powyższej funkcji jest ważona ze współczynnikiem  $\frac{1}{\lambda_k}$ . W przypadku metody MN (ang. *Minimum Norm*) wykorzystywany jest jeden wektor własny  $\mathbf{u}_n$ , ale wybrany w sposób optymalny[185]. Metoda root-MUSIC jest modyfikacją metody MUSIC charakteryzującą się mniejszą złożonością obliczeniową, dla której estymaty otrzymywane są przez znalezienie zer leżących w pobliżu okręgu jednostkowego wielomianu utworzonego przy pomocy wektorów z podprzestrzeni szumu[111], [147].

Alternatywnym podejściem w stosunku do opisywanych powyżej metod jest wykorzystanie informacji zawartej w podprzestrzeni sygnału. W tej klasie metod wykorzystywana jest zwykle aproksymacja macierzy autokorelacji  $\mathbf{R}_{xx}$  wykorzystująca

wektory i wartości własne należące do podprzestrzeni sygnału i otrzymana w wyniku pominięcia części związanej z szumem w równaniu dekompozycji (2.13):

$$\mathbf{R}_{xx} \approx \mathbf{U}_s \mathbf{\Lambda}_s \mathbf{U}_s^H \quad (2.17)$$

Metoda ESPRIT jest sztandarowym reprezentantem metod tej klasy, w której wykorzystywany jest fakt niezmienności wartości własnych macierzy wobec obrotu. Analizowany sygnał  $\mathbf{y}$  dzielony jest na dwie sekwencje równej długości  $\mathbf{y}_1$  i  $\mathbf{y}_2$ , opóźnione względem siebie i skrócone o jedną próbkę. Ponieważ sygnał  $\mathbf{y}$  (z pominięciem szumu) składa się wyłącznie z sumy oscylacji zespolonych, można go przedstawić w postaci macierzowej:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Z}_{A_k, \varphi_k} \quad (2.18)$$

gdzie kolumny macierzy  $\mathbf{A}$  zawierają wartości chwilowe kolejnych oscylacji zespolonych, zaś wartości wektora  $\mathbf{Z}_{A_k, \varphi_k}$  reprezentują ich zespolone amplitudy. Za pomocą wymienionych definicji możliwe jest przedstawienie zależności pomiędzy sygnałami  $\mathbf{y}_1$  i  $\mathbf{y}_2$  poprzez zdefiniowanie i użycie macierzy obrotu  $\mathbf{\Phi} = \text{diag}(e^{j\Omega_1}, \dots, e^{j\Omega_p})$  w następującym równaniu:

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{\Phi} = \mathbf{A}_2, \quad \text{gdzie:} \quad \mathbf{A}_1 = \mathbf{I}_1 \mathbf{A}, \quad \mathbf{A}_2 = \mathbf{I}_2 \mathbf{A} \quad (2.19)$$

gdzie  $\mathbf{I}_1$  i  $\mathbf{I}_2$  są macierzami wybierającymi z macierzy  $\mathbf{A}$  kolejno macierze  $\mathbf{A}_1$  i  $\mathbf{A}_2$ . Ponieważ macierz  $\mathbf{A}$  zawiera wyłącznie wartości chwilowe oscylacji zespolonych, rozpięta jest przez bazę podprzestrzeni sygnału  $\mathbf{U}_s$ . Pamiętając o możliwości aproksymacji równaniem (2.17), jasne staje się, że istnieje pewna macierz  $\mathbf{X}$ , która pozwoli wykorzystać bazę podprzestrzeni sygnału do reprezentowania macierzy sygnału  $\mathbf{A} = \mathbf{U}_s \cdot \mathbf{X}$  (a więc także macierzy sygnałów  $\mathbf{A}_1$  oraz  $\mathbf{A}_2$ ). Stąd też, z wcześniejszych definicji tych macierzy (2.19) wynika że:

$$\mathbf{I}_1 \mathbf{A} \mathbf{\Phi} = \mathbf{I}_2 \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{I}_1 \mathbf{U}_s \mathbf{X} \mathbf{\Phi} = \mathbf{I}_2 \mathbf{U}_s \mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{I}_1 \mathbf{U}_s (\mathbf{X} \mathbf{\Phi} \mathbf{X}^{-1}) = \mathbf{I}_2 \mathbf{U}_s \quad (2.20)$$

Przez wprowadzenie nowego oznaczenia  $\mathbf{\Psi} = \mathbf{X} \mathbf{\Phi} \mathbf{X}^{-1}$  łatwo zauważyć, że możliwe jest rozwiązanie powyższego równania właśnie ze względu na  $\mathbf{\Psi}$ . Ponieważ bezpośrednio z definicji wynika, że macierz  $\mathbf{\Psi}$  ma te same wartości własne co macierz  $\mathbf{\Phi}$ , dekompozycja macierzy  $\mathbf{\Psi}$  na wartości własne przekłada się na możliwość bezpośredniego wyznaczenia estymat  $\hat{\Omega}_k$  wykorzystując argumenty wartości zespolonych znajdujących się na jej diagonalu  $\mathbf{\Phi} = \text{diag}(e^{j\Omega_1}, \dots, e^{j\Omega_p})$ . Zwiększenie dokładności metody ESPRIT może być realizowane przez wykorzystanie metody zupełnych najmniejszych kwadratów czyli tzw. metoda TLS-ESPRIT (ang. *total least-squares ESPRIT*)[111].

Metody podprzestrzeni dostarczają estymatory częstotliwości charakteryzujące się dużą dokładnością i rozdzielczością w rozróżnianiu częstotliwości sąsiadujących ze sobą składowych oraz dużą odpornością na szerokopasmowy szum. Efektywność tych metod jest jednak silnie uzależniona od poprawności użytego modelu sygnału. Ważnym aspektem tych metod jest to, że są one wymagające obliczeniowo, co może ograniczyć obszary zastosowań tej grupy metod w zakresie estymacji w czasie rzeczywistym lub w przypadku ograniczonych zasobów sprzętowych. Dotyczy to także najnowszych metod, m. in. wykorzystujących dekompozycje na wartości osobliwe[160] lub inne wykorzystujące funkcję autokorelacji[61].

Ponadto warto wspomnieć o innych grupach metod, których wykorzystanie jest mniej powszechne w rozważanych dalej zastosowaniach (rozdział 2.3). Są to m.in. metody wykorzystujące liniową predykcję LP (ang. *linear prediction*)[62], metody wykorzystujące pętlę synchronizacji fazy PLL (ang. *phase-locked loops*)[137], metody z filtrem Kalmana (EKF, ang. *Extended Kalman Filter*) wykorzystujące próbki sygnału lub prążki DFT [70], [152], [159], wykorzystujące detekcję przejścia sygnału przez zero (ang. *zero crossing*)[85] oraz metody wykorzystujące sieci neuronowe (ANN, ang. *artificial neural network*) [71], [89].

## 2.3 Obszary zastosowań metod estymacji częstotliwości

### 2.3.1 Przegląd obszarów zastosowań

Estymacja częstotliwości jest podstawowym problemem dla bardzo szerokiego zakresu zastosowań. Poniżej zaprezentowano wybrane przykłady, dla których zostało zaproponowane użycie metody interpolacji widma.

- Określenie kierunku nadejścia sygnału z wykorzystaniem macierzy czujników (DOA, ang. *direction of arrival*)[67], [168]. Algorytmy te mają zastosowanie w telekomunikacji, technice sonarowej i radarowej oraz w przypadku sygnałów audio.
- Pomiarów wibracji mechanicznych: monitorowanie widma pozwala na uzyskanie informacji na temat zużycia elementów mechanicznych oraz ich innych charakterystyk. Estymatory IpDFT zostały zaproponowane m.in. do diagnozowania uszkodzeń silnika indukcyjnego, w tym: detekcji uszkodzeń uzwojenia wirnika [125] oraz postępujących uszkodzeń klatki wirnika[110].
- Algorytmy kompensacji drgań mechanicznych w adaptacyjnych systemach optycznych [96], [97], [99], [103], [104].
- Testowanie parametrów przetworników A/C[23].
- Pomiarów częstotliwości w systemie elektroenergetycznym, w tym: monitorowanie jakości sygnału elektroenergetycznego i stanu bieżącego sieci[56], algorytmy sterowania inwerterem oraz sterowanie mocą[36], [38], pomiary składowych harmonicznych [139], pomiary synchrofazora[151].

### 2.3.2 Pomiar synchrofazora

#### Pomiar częstotliwości sieci elektroenergetycznej

Przykładem zastosowania metod estymacji częstotliwości, który zyskuje coraz więcej uwagi w literaturze specjalistycznej, jest pomiar synchrofazora w systemie elektroenergetycznym, także w kontekście metod interpolowanej DFT[72], [151].

Ze względu na dynamiczny rozwój sieci elektroenergetycznej w ostatnich dekadach, w szczególności integrację odnawialnych źródeł energii oraz zmianę profilu zapotrzebowania odbiorców energii elektrycznej, utrzymanie i zarządzanie siecią znacząco się komplikuje. Elementy nieliniowe i zmienne w czasie obciążenia, stanowiące nieodłączny element takich systemów, stają się źródłem zniekształceń sygnału sieciowego i powodują poważny spadek jakości energii elektrycznej. Wspomniane problemy związane są z rozproszoną naturą odnawialnych źródeł energii oraz niejednorodnością czasową w dostarczaniu

mocy wyjściowej ze względu na porę dnia oraz roku. Z drugiej strony, pojawiają się nowe obszary zapotrzebowań odbiorców indywidualnych, co może skutkować powstaniem nowych problemów jak np. wzmożone zapotrzebowanie związane z ładowaniem pojazdów elektrycznych o tej samej porze dnia – gdzie wraz z rosnącym udziałem w rynku motoryzacyjnym, zapotrzebowanie na energię elektryczną w tym zakresie nieustannie rośnie. Tego rodzaju zmiany w charakterystyce rynku powodują dodatkowe trudności w postaci konieczności bilansowania pomiędzy produkcją a zapotrzebowaniem. Do dodatkowych wyzwań stojących przed nowoczesnymi systemami elektroenergetycznymi zaliczają się także: możliwość dopuszczenia niezależnych producentów energii do sieci, zwiększenie efektywności dystrybucji przez włączenie konsumentów do aktywnego reagowania na aktualny popyt energii elektrycznej, rozwój zaawansowanej infrastruktury monitorującej stan sieci, utrzymanie jakości dostaw energii elektrycznej oraz wdrożenie automatycznych procedur naprawczych oraz mechanizmów logowania błędów[138]. Odpowiedzią na wskazane problemy i stawiane wymagania jest wdrażanie tzw. inteligentnych systemów dystrybucji energii elektrycznej (ang. *Smart Grid*), które mają na celu rozszerzenie możliwości klasycznego systemu elektroenergetycznego. Jednym z kluczowych elementów takiego systemu są moduły PMU (ang. *Phasor Measurement Unit*), w ramach których realizowane są m.in. pomiary synchrofazora.

### Definicja synchrofazora

Fazor rozumiany jest jako wartość zespolona  $X$  obliczona z modelu:

$$X = \frac{X_m}{\sqrt{2}} e^{j\varphi_0} \quad (2.21)$$

w którym parametry  $X_m$ ,  $\varphi$  odpowiadają kolejno parametrom amplitudy i fazy sygnału kosinusoidalnego:

$$x = X_m \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) \quad (2.22)$$

który z kolei modeluje sygnał sieci elektroenergetycznej prądu lub napięcia. Wartość zespolona fazora jest obliczana zawsze dla ustalonej wartości częstotliwości sieci  $f_0$ , która wynosi 50 lub 60 Hz[91], a estymacja dotyczy parametrów amplitudy i fazy. Model z równania (2.21) nazywany jest także statycznym modelem fazora. Z kolei synchrofazorem określana jest wartość zespolona  $X(t)$ , dla której faza  $\varphi$  sygnału czasowego odniesiona jest do fazy sygnału  $\cos(2\pi f_0 t)$  przy założeniu, że moment czasowy  $t = 0$  jest zsynchronizowany z czasem uniwersalnym UTC (ang. *Universal Time coordinates*) zwykle z użyciem systemu GPS (ang. *Global Positioning System*). Dla takiego założenia można przyjąć model, dla którego amplituda i faza sygnału (2.22) mogą zmieniać się w czasie, przez co możliwe jest uwzględnienie zakłóceń dynamicznych występujących w sygnale:

$$X(t) = \frac{X_m(t)}{\sqrt{2}} e^{j\varphi(t)} = \frac{X_m(t)}{\sqrt{2}} e^{2\pi \int g(t) dt + \varphi_0} \quad (2.23)$$

gdzie funkcja  $g(t) = f(t) - f_0$ , a więc określa różnicę pomiędzy częstotliwością chwilową a częstotliwością sieci. Równanie modelu fazora (2.21) rozwinięte do wersji wykorzystującej wartość synchrofazora w równaniu (2.23) nazywane jest także dynamicznym modelem fazora. Metody estymacji wykorzystujące statyczny model fazora (równanie 2.21) obliczają wartość synchrofazora zwykle na podstawie estymacji stałych wartości amplitudy i fazy sygnału sinusoidalnego w badanym zakresie. Z kolei metody wykorzystujące dynamiczny model fazora (równanie 2.23) dodatkowo wykorzystują estymatę parametrów określających szybkość zmian częstotliwości oraz amplitudy.

## Pomiary synchronofazora

Zgodnie ze standardem IEEE Std C37.118.1-2011, moduł PMU powinien raportować wyniki pomiarów: synchronofazora, częstotliwości oraz zmiany częstotliwości do węzła pomiarowego ustaloną liczbę razy w ciągu sekundy[91]. Pomiary realizowane przez moduł PMU dostarczają informacji o stanie sieci poprzez stałe monitorowanie i komunikację pomiędzy węzłami wewnątrz sieci. Dysponując wieloma punktami pomiarowymi możliwa jest kompleksowa analiza stanu sieci, pozwalająca na optymalizację procesu wytwarzania i przesyłu energii oraz na zwiększenie poziomu bezpieczeństwa. W module PMU realizowane są pomiary amplitudy, fazy, częstotliwości oraz tempo zmiany częstotliwości (ROCOF, ang. *rate of change of frequency*). Wymagania wobec używanych estymatorów w pomiarze synchronofazora przedstawione są w standardzie IEEE C37.118.1-2011[91]. Dokument określa parametry metrologiczne, którymi powinny cechować się estymatory, wprowadzone zostały definicje dwóch klas wydajności dla układów PMU względem stosowanej metody estymacji parametrów: klasa P (ang. *protection*) cechująca się wysoką responsywnością oraz klasa M (ang. *monitoring*) cechująca się zwiększoną dokładnością pomiaru.

### 2.3.3 Metody estymacji częstotliwości w wyznaczaniu synchronofazora

Klasyczny podział na metody estymacji fazora jest wprowadzany ze względu na metody czasowe, częstotliwościowe oraz czasowo-częstotliwościowe[138].

Przykładami metod czasowych estymacji parametrów fazora wykorzystującymi techniki omawiane wcześniej w tym rozdziale są metody oparte na: adaptacyjnym filtrze wycinającym *notch filter*[63], metodzie Prony'ego [131], metodzie *matrix pencil* [31], metodzie TLS-ESPRIT[10], metodzie MUSIC [76], algorytmie detekcji przejścia przez zero (*zero-crossing*)[140], pętli synchronizacji fazy PLL[84], filtry Kalmana[182]. Przykładem metody czasowo-częstotliwościowej estymacji parametrów fazora jest estymator oparty na transformacji falkowej [8]. Głównym atutem analizy przy pomocy metod czasowych jest stosunkowo łatwe uzyskanie dynamicznych parametrów fazora prądu i napięcia. Przykładem popularnej klasy metod wykorzystujących dynamiczny model fazora są metody wykorzystujące ważoną metodę najmniejszych kwadratów w celu obliczenia wartości współczynników rozwinięcia w szereg Taylora modelu fazora (TWLS, ang. *Taylor Weighted Least Squares*)[143]. Jednym z rozwinięć tej metody jest uzupełnienie o wstępną estymację częstotliwości z wykorzystaniem algorytmu interpolacji widma DFT [16]. Innym przykładem jest wykorzystanie metody TWLS z metodą *matrix pencil* [162].

W ogólności metody czasowe cechują się wysokim kosztem obliczeniowym oraz mogą wystąpić potencjalne problemy w znalezieniu adekwatnego modelu dla zachodzących zmian w mierzonym sygnale. Część z tych metod wymaga także wskazania dokładnej wartości wstępnej do estymacji mierzonych parametrów. W pracy [49] przedstawiono porównanie pomiędzy estymatorami czasowymi a częstotliwościowymi w zakresie dokładności i czasu wykonania dla krótkich czasu pomiaru. Pokazano, że czas estymacji dla metod interpolowanej DFT jest mniejszy o kilka rzędów wielkości niż dla porównywanych metod podprzestrzeni. Jednocześnie metody częstotliwościowe mogą cechować się wystarczającą dokładnością w kontekście pomiarów w systemie elektroenergetycznym. W [56] przedstawiono porównanie metody *zero-crossing* z estymatorem interpolowanej DFT w kontekście zakłóceń statycznych i dynamicznych występujących w rzeczywistym systemie. Z analizy porównawczej wynika, że zastosowanie metody IpDFT jest konkurencyjne ze względu na dokładność pomiaru, przy czym pozwala na uniknięcie konieczności użycia dodatkowej filtracji wiążącej się z wprowadzeniem dodatkowego opóźnienia, której stosowanie jest

konieczne w przypadku metody *zero-crossing*.

Metody częstotliwościowe są najczęściej stosowanymi metodami estymacji pomiaru fazora, w szczególności metody wykorzystujące wartości prążków DFT[33], [141]. W klasycznych pomiarach stosuje się okna pomiarowe o długości stanowiącej wielokrotność okresu podstawowego sygnału[121]. Dokładność metody bezpośredniej jest jednak ograniczona przez błędy wynikające z niespełnienia warunków próbkowania koherentnego oraz wpływu przecieku widma od składowych zakłócających. Metodą pozwalającą na ograniczenie wpływu przecieku widma pochodzącego od innych składowych jest wykorzystanie okien czasowych[176]. Z kolei inne ograniczenia wynikające z niekoherentnego sposobu próbkowania mogą być skutecznie eliminowane z wykorzystaniem metod interpolowanej DFT. Stąd też, wraz ze zwiększającym się naciskiem na zmniejszenie kosztów wytwarzania jednostek PMU, w ostatnich latach można zauważyć istotny wzrost zainteresowania użyciem metod interpolowanej DFT, które zachowują korzyści klasycznego podejścia i jednocześnie ograniczają wpływ wspomnianych efektów na dokładność pomiaru. Przekłada się to na zwiększoną liczbę publikacji, a problem estymacji synchronofazora stanowi jeden z ważniejszych obszarów, dla których przedstawiane są nowe propozycje estymatorów [19], [20], [72], [77], [86], [95], [121], [151]. W [72], [151] przedstawiono iteracyjne estymatory oparte na interpolacji prążków DFT, które spełniają wymagania stawiane przez standard IEEE C37.118.1[91] zarówno wobec klasy M oraz P.

Wadą metod częstotliwościowych, w tym opartych na wykorzystaniu prążków DFT, jest to, że korzystają ze statycznego modelu fazora. W metodach interpolowanej DFT, to ograniczenie może być w pewnym stopniu kompensowane poprzez skrócenie czasu pomiaru dla metod charakteryzujących się eliminacją błędu związanego z obecnością składowej sprzężonej w estymacji[37], [72]. W niniejszej pracy autor przedstawia propozycję bezpośrednich metod interpolowanej DFT wykorzystujących obie wspomniane techniki: nakładania okien czasowych cechujących się szerokim zakresem parametrów funkcji okna oraz kompensacji wpływu bliskich składowych widmowych, co przekłada się na możliwość skrócenia czasu trwania pomiaru.

# Rozdział 3

## Metody interpolacji widma

### 3.1 Wprowadzenie do rozdziału

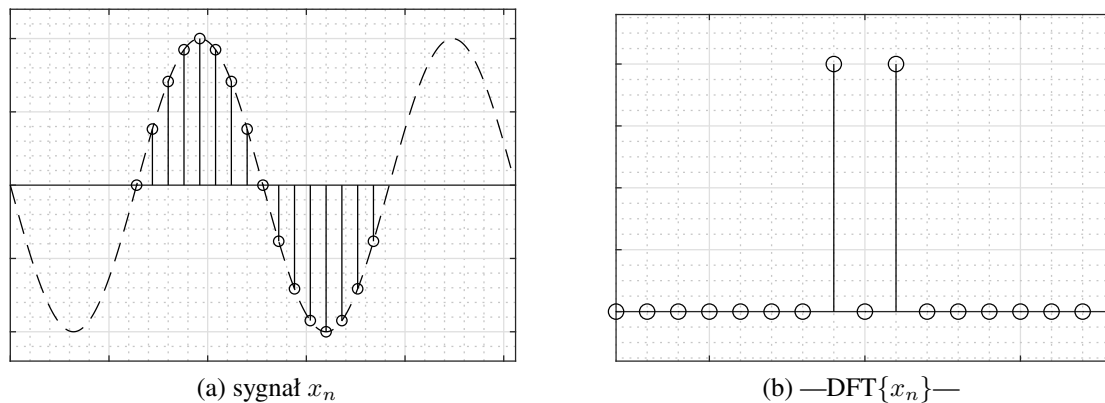
#### Przekształcenie DFT i algorytmy obliczania

Dyskretne przekształcenie Fouriera stanowi obecnie podstawowe narzędzie analizy częstotliwościowej sygnałów i jest jednym z najszerzej wykorzystywanych operacji w systemach cyfrowego przetwarzania sygnałów. Składa się na to szereg czynników. Przede wszystkim wynika to bezpośrednio z własności samego przekształcenia, które oferuje możliwość estymacji parametrów składowych częstotliwościowych badanego sygnału i charakteryzuje się krótkim czasem wykonania. Współcześnie efektywność wykorzystania DFT opiera się na ciągłym rozwoju szybkich algorytmów obliczania FFT [69][139], szerokim dostępie do gotowych implementacji programowych zoptymalizowanych dla szeregu platform oraz specjalistycznych rozwiązaniach sprzętowych takich jak procesory sygnałowe czy specjalizowane akceleratory [124]. Z tego względu DFT jest bardzo popularnym wyborem w szerokiej gamie zastosowań, a jego użycie wsparte jest bardzo dobrze ugruntowaną wiedzą teoretyczną oraz aplikacyjną opisaną w literaturze specjalistycznej[135]. W ramach tych opracowań zostały także przedstawione w sposób szczegółowy ograniczenia wynikające z użycia DFT do estymacji parametrów sygnału.

#### Próbkowanie koherentne i niekoherentne sygnałów składających się z wielu oscylacji oraz przeciek widma

Dyskretne przekształcenie Fouriera w swoich założeniach przyjmuje, że cała sekwencja próbek sygnału dyskretnego, dla którego wykonywane są obliczenia, powtarza się w sposób okresowy. Jeżeli w rzeczywistym systemie pomiarowym takie założenie jest spełnione, to każdy niezerowy prążek w otrzymanym widmie bezpośrednio reprezentuje parametry składowych harmonicznych zawartych w badanym sygnale (z dokładnością do błędów pomiarowych i numerycznych). Taki sposób akwizycji sygnału nazywany jest *próbkowaniem koherentnym* (rysunek 3.1). Jednakże opisywana sytuacja nie jest zbyt częsta i w większości zastosowań nie można wstępnie ustalić częstotliwości badanego sygnału, a więc najczęściej okno pomiarowe nie jest zsynchronizowane z mierzonym sygnałem, tj. sygnał jest *próbkiwany niekoherentnie* (rysunek 3.2). Pomimo tego, iż rejestrowany sygnał zawiera wyłącznie pojedynczą oscylację, to w widmie pojawia się wiele niezerowych prążków. Ten charakterystyczny efekt „rozmycia” energii pojedynczej oscylacji nazywany jest *przeciekaniem widma* (widmo na wykresie 3.2b). Z punktu widzenia osoby wykonującej pomiar, przeciek widma można rozumieć dwojako:



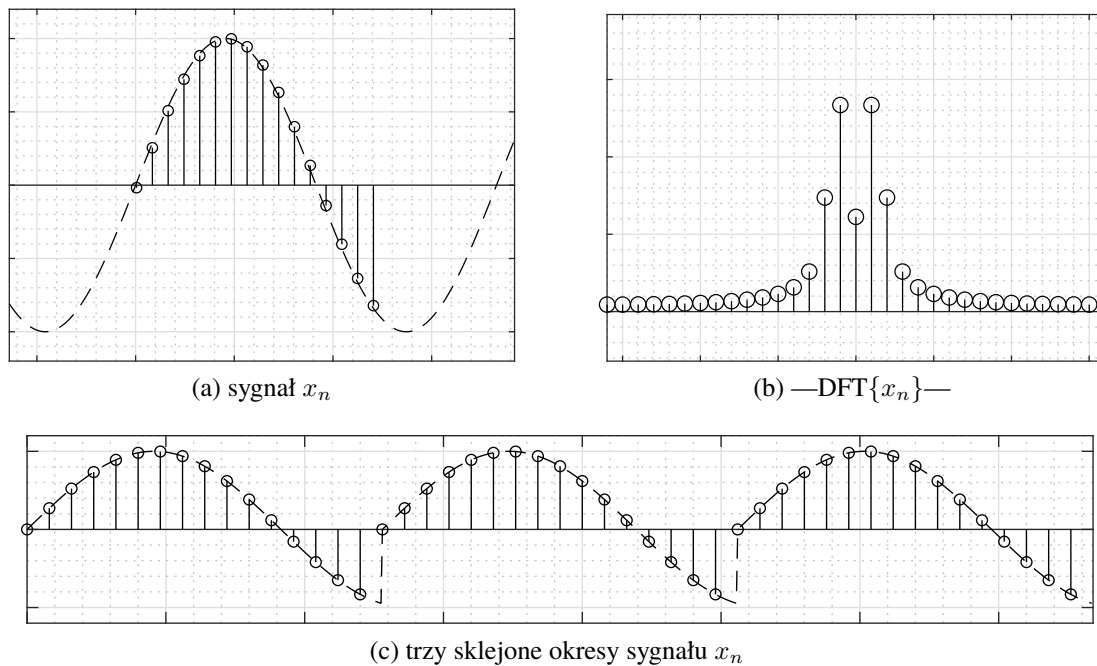


Rysunek 3.1. Demonstracja koherentnego sposobu próbkowania.

- pamiętając o założeniu okresowości sygnału w DFT, należy stwierdzić, że zarejestrowany sygnał złożony jest z okresowo powtarzającego się wycinka sygnału oryginalnego, który chwilowo znalazł się w obrębie okna pomiarowego (jego trzy okresy zostały przedstawione na rysunku 3.2c). Dlatego jeśli nie zostaną poczynione żadne wcześniejsze założenia co do sygnału, to uzasadnione wydaje się stwierdzenie, że każdy niezerowy prążek DFT świadczy o obecności jednej oscylacji harmoniczej w sygnale. Już na pierwszy rzut oka widać, że okresowy sygnał 3.2c złożony z kilku zarejestrowanych wycinków sygnału z pewnością nie jest sygnałem sinusoidalnym i musi być reprezentowany przez szereg sygnałów harmoniczych.
- Występowanie wielu niezerowych prążków DFT może także świadczyć o obecności w sygnale mniejszej ilości oscylacji składowych i wynika z niespełnienia warunku próbkowania koherentnego. Jeżeli znany jest kształt widma związany z pojedynczą oscylacją, to możliwe powinno być wyznaczenie parametrów sygnału w dokładniejszy sposób niż przez wykorzystanie prążków znajdujących się w lokalnych maksimach modułu DFT.

### Estymacja parametrów składowych zawartych w widmie z wykorzystaniem pojedynczych prążków DFT

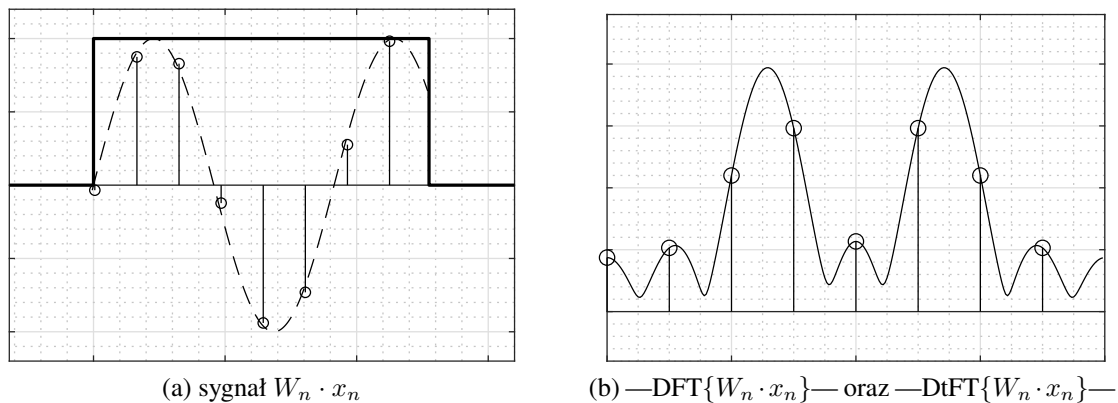
Najprostszym sposobem wyznaczenia parametrów oscylacji zawartej w sygnale jest odczytanie modułu i fazy wartości zespolonej pojedynczego prążka. Wybór prążka wykorzystywanego w estymacji polega na wyszukaniu lokalnego maksimum modułu widma. Opisywana metoda jest nieparametryczną metodą estymacji parametrów, która bezpośrednio wynika z założeń przekształcenia DFT. Jednak w przypadku próbkowania niekoherentnego, ze względu na dyskretny charakter widma, częstotliwość prążka używanego w estymacji nie odpowiada dokładnie częstotliwości estymowanej składowej. Błąd związany z różnicą pomiędzy położeniem lokalnego maksimum widma ciągłego a położeniem lokalnego maksimum modułu DFT nazywany jest *efektem zafalowania* (ang. *picket-fence effect*). Dlatego wykorzystanie opisywanego podejścia powinno być uwarunkowane zapewnieniem warunków pomiaru, które są jak najbardziej zbliżone do warunku próbkowania koherentnego w celu minimalizacji błędów.



Rysunek 3.2. Konsekwencje próbkowania niekoherentnego. Widmo DFT z rys. (b) również dobrze można uzyskać z sygnału (a) jak i z (c) (pomijając prążki zerowe – ponieważ sygnał (c) składa się z  $3N$  próbek, w widmie pojawiają się dwie zerowe próbki na każdy niezerowy prążek widoczny w (b)).

### Występowanie wielu niezerowych prążków DFT może oznaczać obecność pojedynczej składowej w sygnale

Jeżeli jednak przyjąć, że dyskretne próbki sygnału zawarte w oknie pomiarowym są jedynie fragmentem dłuższej sekwencji badanego sygnału, a więc są uzyskane przy pomocy „wycięcia” funkcją okna czasowego (rysunek 3.3a), to okazuje się, że dla pojedynczej oscylacji, przeciek widma w domenie częstotliwościowej przybiera kształt odpowiednio przesuniętej charakterystyki okna czasowego (rysunek 3.3b). Efekt przecieku widma jest więc bezpośrednią konsekwencją skończonego czasu trwania okna pomiarowego, a występowanie „zer” w widmie DFT dla próbkowania koherentnego (rysunek 3.1b) spowodowane jest synchronizacją miejsc występowania wartości zerowych transformaty okna DtFT z miejscami obliczanych prążków DFT. Z właściwości liniowości transformaty Fouriera wynika także, że dla sygnału złożonego z wielu oscylacji (sygnał wieloczęstotliwościowy) ciągłe widmo przybiera kształt złożony z sumy poprzesuwanych charakterystyk wykorzystanego okna czasowego. Tym samym dokładne określenie parametrów sygnału złożonego z pojedynczej oscylacji sprowadza się do znalezienia wartości reprezentującej wartość lokalnego maksimum ciągłej funkcji DtFT (rysunek 3.3b). W przypadku próbkowania koherentnego, maksimum widma pokrywa się z jednym z prążków DFT. Jednak w przypadku kiedy okno pomiarowe nie jest zsynchronizowane z badanym sygnałem, wyznaczenie lokalnego maksimum modułu widma związane jest z kosztownymi obliczeniowo procedurami wyszukiwania. Zagęszczenie punktów DtFT możliwe jest z wykorzystaniem techniki uzupełnienia zerami [169], transformaty chirp-Z[6], [154] lub przez bezpośrednie obliczanie wartości DtFT z definicji, z wykorzystaniem algorytmów wyszukiwania maksimum. Przykładami takich algorytmów są metody zawężania siatki (ang. *grid search*)[108], metody bisekcji lub metoda Newtona[184]. Zastosowanie wymienionych technik powoduje



Rysunek 3.3. Efekt przecieku widma spowodowany skończonym czasem trwania pomiaru. Rysunek b) przedstawia widmo ciągłe sygnału dyskretnego i próbkujące je prążki DFT.

znaczące zwiększenie nakładów obliczeniowych związanych z rozpatrywaną metodą, co z kolei przekłada się na utratę głównego atutu wykorzystania przekształcenia DFT – krótkiego i dobrze określonego czasu wykonania dla zastosowań czasu rzeczywistego.

### Problemy związane z występowaniem przecieku widma od innych składowych

Dodatkowo sprawę komplikuje przeciek widma pochodzący od innych komponentów częstotliwościowych znajdujących się w sygnale, przez co położenie lokalnego maksimum widma ciągłego DtFT może nie pokrywać się z rzeczywistą częstotliwością oscylacji. Ten efekt zwykle niwelowany jest za pomocą zastosowania okien czasowych innych niż okno prostokątne. Takie podejście sprawdza się jednak tylko dla kompensacji wpływu składowych oddalonych (ang. *long-range leakage*), ale nie jest w stanie całkiem wyeliminować wpływu składowych, które w domenie częstotliwości bezpośrednio sąsiadują z badaną oscylacją (ang. *short-range leakage*), a której parametry są poddane estymacji[57]. W niniejszej pracy przeciek określany jako *short-range* jest rozumiany zarówno jako przeciek pochodzący od listka głównego oraz listków bocznych sąsiadujących oscylacji. Ograniczenie wpływu przecieku widma tego rodzaju wymaga wydłużenia czasu trwania okna pomiarowego, wykluczając możliwość użycia metody dla pewnych zakresów zastosowań. Do wymienianych problemów należy jeszcze dodać rosnące wartości potencjalnego błędu wynikającego z niespełnienia warunku stacjonarności DFT w przypadku wydłużającego się czasu pomiaru.

### Metody interpolacji widma

Zwiększenie dokładności estymacji w przypadku użycia dyskretnoczasowej transformacji Fouriera jest realizowane przez znalezienie położenia wartości widma bliżej lokalnego maksimum i wyznaczenia za jej pomocą parametrów sygnału. Odmiennym podejściem charakteryzują się metody interpolacji widma IpDFT, dla których wykorzystywana jest informacja znajdująca się w dwóch lub więcej prążkach widma do wyznaczenia wartości parametrów sygnału. Poprawa dokładności pomiaru w tym przypadku wynika z wykorzystania wiedzy *a priori* o kształcie widma, przez co nie powoduje znaczącego wzrostu kosztów obliczeniowych. Przykładem takiego założenia na temat analizowanych sygnałów jest przypadek analizy sygnałów okresowych, które składają się wyłącznie ze składowych harmonicznnych. Jeśli zostanie wykorzystany algorytm interpolacji, który uwzględnia wpływ

przecieku widma od sąsiadujących komponentów widmowych, to możliwe jest otrzymanie dokładnego pomiaru bez znaczącego podniesienia złożoności obliczeniowej. Ostatecznie zasadne wydaje się twierdzenie, że analiza widma przy pomocy algorytmów interpolacji widma stanowi logiczne rozszerzenie analizy z pomocą samych prążków DFT i stanowi narzędzie komplementarne w stosunku do samego przekształcenia zachowując przy tym wszystkie jego zalety.

Niniejszy rozdział zawiera wprowadzenie definicji dotyczących dyskretnej transformacji Fouriera oraz przegląd dostępnych metod interpolacji widma. Kolejność przedstawiania metod jest związana ze sposobem uwzględniania przecieku widma w interpolacji: najpierw opisywana jest grupa estymatorów wykorzystujących w modelu pojedynczą oscylację zespoloną, następnie estymatory częstotliwości rzeczywistego sygnału sinusoidalnego i kończąc na estymacji sygnałów zakłóconych składowymi harmonicznymi i interharmonicznymi. Przedstawiony przegląd metod interpolacji widma ma na celu opisanie technik stosowanych w metodach IpDFT, co pozwala na porównanie ich właściwości z podejściem wykorzystywanym w metodach zaproponowanych dalej w niniejszej rozprawie.

## 3.2 Sygnał wieloczęstotliwościowy i jego widmo

### 3.2.1 Model sygnału wieloczęstotliwościowego

Dyskretnoczasowy model sygnału wieloczęstotliwościowego, składający się z  $N$  próbek i nałożonym oknem czasowym  $w(n)$ , jest zdefiniowany jako:

$$x(n) = w(n) \sum_{h=1}^H A_h \sin(2\pi\lambda_h n/N + \varphi_h), \quad \text{dla } n = 0, \dots, N-1 \quad (3.1)$$

gdzie parametry: amplituda, faza i częstotliwość składowych oscylacji rzeczywistych reprezentowane są kolejno przez symbole  $A_h$ ,  $\varphi_h$  i  $\lambda_h$  dla składowej oznaczonej indeksem  $h$ . Powyższą sekwencję  $N$  próbek sygnału dyskretnego można otrzymać z sygnału analogowego poprzez równomierne próbkowanie z częstotliwością próbkowania  $f_s = \frac{1}{T}$ , gdzie  $T$  oznacza okres próbkowania. Częstotliwość unormowana  $\lambda$  jest zdefiniowana jako  $\lambda = fNT$ , gdzie  $f$  oznacza częstotliwość wyrażoną w Hz. Częstotliwość  $\lambda_h$  wyraża liczbę okresów składowej  $h$  znajdujących się w oknie o długości  $NT$ . Wykorzystując wzór Eulera, powyższy model można przedstawić za pomocą oscylacji zespolonych:

$$x(n) = w(n) \sum_{h=1}^H \left[ \frac{A_h}{2j} e^{(j2\pi\lambda_h n/N + j\varphi_h)} - \frac{A_h}{2j} e^{(-j2\pi\lambda_h n/N - j\varphi_h)} \right], \quad \text{dla } n = 0, \dots, N-1 \quad (3.2)$$

Powyższy model może być także przedstawiony z wykorzystaniem oscylacji zespolonych:

$$x(n) = w(n) \sum_{l=1}^L B_l e^{(j2\pi\lambda_l n/N)}, \quad \text{dla } n = 0, \dots, N-1 \quad (3.3)$$

dla  $L$  składowych z parametrami  $B_l$  i  $\lambda_l$ , gdzie amplituda  $B_l$  jest wartością zespoloną. Dla sygnału składającego się wyłącznie z próbek o wartościach rzeczywistych i założeniu  $L = 2H$ , wartości zespolonej amplitudy  $B_l$  są parami sprzężone, a model przyjmuje formę z równania (3.2).

### 3.2.2 Dyskretna transformacja Fouriera

Dyskretna transformacja Fouriera definiowana jest następująco:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N} \quad (3.4)$$

Operacją odwrotną do DFT jest odwrotna transformata Fouriera (IDFT, ang. *inverse DFT*):

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j2\pi kn/N} \quad (3.5)$$

### 3.2.3 Dyskretnoczasowa transformacja Fouriera

Ciągłą funkcję  $X(\lambda)$  reprezentującą widmo sygnału  $x(n)$  i otrzymaną w wyniku zastosowania dyskretnoczasowej transformacji Fouriera (DtFT, ang. *Discrete-time Fourier Transform*) definiuje się jako:

$$X(\lambda) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{j2\pi \lambda n/N} \quad (3.6)$$

Dyskretne wartości DFT uzyskane z równania (3.4) są rozłożone równomiernie w ciągłym widmie DtFT  $X(\lambda)$ .

### 3.2.4 Widmo sygnału wieloczęstotliwościowego

Widmo sygnału modelowanego wzorem (3.2) przybiera następującą postać:

$$X(\lambda) = \sum_{h=1}^H \left[ \frac{A_h}{2j} e^{j\varphi_h} W(\lambda - \lambda_h) - \frac{A_h}{2j} e^{-j\varphi_h} W(\lambda + \lambda_h) \right] \quad (3.7)$$

lub dla wersji z oscylacjami zespolonymi

$$X(\lambda) = \sum_{l=1}^L B_l W(\lambda - \lambda_l) \quad (3.8)$$

a więc składa się z sumy przesuniętych o częstotliwość  $\lambda_l$  charakterystyk okna  $W(\lambda)$  i skalowanych przez amplitudę zespoloną  $B_l$ .

Dyskretyzacja widma  $X(\lambda)$  do postaci uzyskiwanej przy pomocy DFT wprowadza niejednoznaczność w kwestii interpretacji wartości prążków uzyskanego widma  $X_k$ . Jeśli sygnał dyskretny  $x(n)$  jest okresowy, każdy niezerowy prążek  $X_k$  reprezentuje jedną oscylację zespoloną. Jest to przypadek, dla którego wartości częstotliwości unormowanej  $\lambda_h$  przyjmują wartości całkowite (całkowita liczba okresów w oknie pomiarowym). Jeśli jednak sekwencja próbek  $x(n)$  została uzyskana z użyciem okna czasowego  $w(n)$  przez próbkowanie niekoherentne, to wówczas występuje zjawisko przecieku widma, a uzyskane widmo DFT  $X_k$  będzie przybierało wartości określone przez charakterystykę częstotliwościową okna  $W(\lambda)$ . Jest to sytuacja, w której przynajmniej jedna z wartości  $\lambda_h$  nie jest całkowita. Dyskretna postać widma sygnału wieloczęstotliwościowego  $X(\lambda)$  przyjmuje następującą postać (dla wariantu modelu (3.7)):

$$X_k = \sum_{h=1}^H \left[ X_k^{(\lambda_h)} + X_k^{(-\lambda_h)} \right] = \sum_{h=1}^H \left[ \frac{A_h}{2j} e^{j\varphi_h} W(k - \lambda_h) - \frac{A_h}{2j} e^{-j\varphi_h} W(k + \lambda_h) \right] \quad (3.9)$$

oraz dla wariantu modelu z równania (3.8):

$$X_k = \sum_{l=1}^L X_k^{(\lambda_l)} = \sum_{l=1}^L B_l W(k - \lambda_l) \quad (3.10)$$

gdzie za pomocą symbolu  $X_k^{(\lambda_l)}$  oznaczono częściowy składnik wartości prążka  $X_k$  pochodzący od pojedynczej składowej widmowej o częstotliwości  $\lambda_l$ .

### 3.3 Redukcja efektu przecieku widma za pomocą okien czasowych

Zjawisko przecieku widma jest ograniczone przez zastosowanie innego okna czasowego niż okno prostokątne. Dzięki temu można otrzymać zwiększenie nachylenia opadania listków bocznych i zmniejszenia ich poziomu w charakterystyce widmowej okna. Należy pamiętać, że jest to związane z poszerzeniem listka głównego charakterystyki częstotliwościowej okna.

#### 3.3.1 Okno prostokątne

Okno prostokątne przyjmuje wartości 1 w całym swoim zakresie:

$$w(n) = 1, \quad \text{dla } n = 0, \dots, N - 1 \quad (3.11)$$

Dyskretna charakterystyka częstotliwościowa okna prostokątnego przyjmuje postać[42]:

$$W_r(\lambda) = \frac{1 - e^{-j2\pi\lambda}}{1 - e^{-j2\pi\lambda/N}} = e^{-j\pi\lambda(N-1)/N} \frac{\sin(\pi\lambda)}{\sin(\pi\lambda/N)} \quad (3.12)$$

#### 3.3.2 Okna z bazą kosinusową

Okna z bazą kosinusową definiowane są jako suma funkcji kosinus o częstotliwościach będącymi wielokrotnością częstotliwości związanej z czasem trwania okna pomiarowego:

$$w_n = \sum_{h=0}^{H-1} (-1)^h a_h \cos\left(\frac{2\pi n h}{N}\right), \quad n = 0, \dots, N - 1 \quad (3.13)$$

gdzie współczynniki  $a_h$  określają własności okna, w szczególności postać charakterystyki częstotliwościowej  $W(\lambda)$ .

#### Okno Hanninga

Szczególnością popularnością w zastosowaniach analizy częstotliwościowej sygnału z wykorzystaniem DFT cieszy się okno Hanninga, które jest definiowane jako:

$$w_n = 0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right), \quad n = 0, \dots, N - 1 \quad (3.14)$$

Wykorzystując zależności zdefiniowane dla okna prostokątnego można łatwo pokazać, że widmo okna Hanninga przyjmuje wartości:

$$W(\lambda) = \frac{1}{2} W_r(\lambda) - \frac{1}{4} [W_r(\lambda - 1) + W_r(\lambda + 1)] \quad (3.15)$$

## Okna I klasy Rife'a-Vincenta

Okna I klasy Rife'a-Vincenta po raz pierwszy zostały opisane przez autorów w [149]. Cechują się maksymalnym asymptotycznym tłumieniem listków bocznych (nachylenie opadania dla warunku  $\lambda \gg 1$ ) i z tego powodu w literaturze nazywane są także oknami MSD (ang. *maximum side-lobes decay*)[11]. W tym celu Rife i Vincent zdefiniowali wartości współczynników  $a_h$  dla okien o podstawie kosinusowej jako:

$$a_h = 2a_0 \prod_{k=0}^{H-1} \frac{H-h+k}{H+k} \quad (3.16)$$

gdzie współczynnik  $a_0 = 1$ . Postać czasowa tak zdefiniowanych okien nie spełnia jednak warunku normalizacji dla środkowej wartości okna, tzn.  $\max_n w_n = 1$ . Proces normalizacji tych okien opisany jest w [11] i [36]. Docelowo wartości współczynników można obliczyć za pomocą wyrażień:

$$a_0 = \frac{C_{2H-2}^{H-1}}{2^{2H-2}}, \quad a_h = \frac{C_{2H-2}^{H-h-1}}{2^{2H-3}}, \quad h = 1, \dots, H-1 \quad (3.17)$$

gdzie symbol  $C_m^p$  reprezentuje współczynnik dwumianowy Newtona:

$$C_m^p = \binom{m}{p} = \frac{m!}{p!(m-p)!} \quad (3.18)$$

Warto zauważyć, że dla wartości parametru  $H = 1$  otrzymuje się okno prostokątne ( $a_0 = 1$ ), a dla wartości parametru  $H = 2$  okno Hanninga ( $a_0 = 0.5, a_1 = 0.5$ , równanie (3.14)).

Funkcja aproksymująca, dla założenia  $H > 1$  i  $\lambda \ll N$ , przyjmuje postać[12]:

$$W_H(\lambda) = \frac{N(2H-2)!}{\pi \cdot 2^{2H-2}} \frac{e^{-j\pi\lambda} \sin(\pi\lambda)}{\lambda \prod_{h=1}^{H-1} (h^2 - \lambda)} \quad (3.19)$$

Podobnie jak dla postaci czasowej, warto zauważyć, że powyższa zależność dla wartości parametru  $H = 1$  (okno prostokątne) zamienia się w uproszczoną wersję ( $\lambda \ll N$ ) relacji z (3.12), a dla wartości parametru  $H = 2$  (okno Hanninga) uproszczoną wersję zależności (3.15)).

## Okna GMSD: uogólnione okna MSD

Okna MSD są popularnym wyborem dla zastosowania w metodach interpolacji widma ze względu na to, że oferują wygodną postać aproksymacji widma dla pojedynczej oscylacji zespolonej (równanie (3.19)). W [72],[37], wprowadzane estymatory wykorzystują okna czasowe postaci  $\sin^p$ , które dla parzystych wartości parametru okna  $p$  są równoważne z oknami MSD. Pełna postać czasowa tych okien przedstawia się w następujący sposób:

$$w(n) = \sin^p \left( \frac{n\pi}{N} \right) \quad (3.20)$$

gdzie  $p$  jest nieujemną liczbą całkowitą i stanowi parametr dla okna. W [37] pokazano, że rodzina takich okien zachowuje własność maksymalnego opadania listków bocznych charakteryzującą okna MSD. Stąd wprowadzane okna nazywane są również jako uogólnione

okna maksymalnego opadania listków bocznych (GMSD, ang. *generalized maximum sidelobe decay windows*) ze względu na rozszerzenie zbioru możliwych wartości parametru okna. Funkcja aproksymująca charakterystykę widmową tej rodziny okien może zostać przedstawiona jako[37]:

$$W_p(\lambda) = \frac{\frac{N \cdot p!}{\pi \cdot 2^p} e^{-j\pi\lambda} \sin\left(\pi\lambda + z\frac{\pi}{2}\right)}{(-1)^{r+z} \prod_{h=-(r+z)}^r \left(\lambda + h + \frac{z}{2}\right)} \quad (3.21)$$

gdzie parametry  $z$  oraz  $r$  są zdefiniowane przy pomocy parametru  $p$  jako  $p = 2r + z$  oraz  $r = \lfloor p/2 \rfloor$  [37].

### Wpływ użycia okna innego niż prostokątne na wariancję estymatora

Zastosowanie okna czasowego innego niż prostokątne powoduje wzmocnienie szumu obecnego w sygnale ze względu na poszerzenie listka głównego charakterystyki częstotliwościowej okna, a więc skutkuje w pogorszeniu się stosunku sygnał/szum (współczynnik SNR) uzyskanego widma. Widmo dla danego okna czasowego  $w(n)$  charakteryzuje się stratą stosunku sygnał-szum o wartości[60]:

$$SNR_{\text{loss}} = 10 \log_{10} \left( \frac{(\sum_{n=0}^{N-1} w(n))^2}{N \sum_{n=0}^{N-1} w^2(n)} \right) \text{ dB} \quad (3.22)$$

Współczynnik ENBW (ang. *Equivalent Noise Band Width*) definiuje szerokość pasma wyrażonego w jednostkach częstotliwości unormowanej (bin) teoretycznego filtra idealnego, który filtruje taką samą ilość energii jak rozważane okno czasowe. Jest on wyrażony dla wartości okna czasowego  $w(n)$  jako[42]:

$$ENBW = N \frac{\left( \sum_{n=0}^{N-1} w_n^2 \right)}{\left( \sum_{n=0}^{N-1} w_n \right)^2} \quad (3.23)$$

## 3.4 Interpolacja widma DFT

### 3.4.1 Metody interpolacji widma

Celem metod interpolacji widma jest otrzymanie estymat wartości parametrów sygnału wieloczęstotliwościowego przez wykorzystanie wartości prążków DFT (lub wartości uzyskanych z widma ciągłego DtFT). Niniejsza praca skupia się wyłącznie na temacie estymacji częstotliwości i w dalszych rozważaniach najczęściej pomijane jest zagadnienie estymacji wartości amplitudy i fazy składowych sygnału wieloczęstotliwościowego. Warto jednak nadmienić, że estymatory amplitudy i fazy związane z metodami interpolacji widma zwykle wymagają użycia estymatora częstotliwości do wyznaczenia pozostałych parametrów.



### 3.4.2 Metoda uzupełniania zerami

Metoda uzupełniania zerami (ang. *zero padding*) stanowi nieparametryczną metodę interpolacji widma. Umożliwia uzyskanie zagęszczonego próbkowania ciągłego widma DtFT przez dodanie próbek zerowych do badanego sygnału czasowego i wykorzystanie procedury obliczania DFT. Uzyskane w ten sposób próbki charakteryzują się zwiększoną rozdzielczością częstotliwościową w stosunku  $\frac{N+M}{N}$ , gdzie  $M$  oznacza liczbę dodanych zer. Zastosowanie interpolacji przez dodanie próbek zerowych pozwala na dokładniejsze ustalenie lokalnego widma DtFT, ale nie wpływa na postać przecieku widma pochodzącego od innych składowych widmowych.

### 3.4.3 Interpolacja funkcjami uniwersalnymi

Jednym z prostszych podejść wykorzystywanym do interpolowania wartości lokalnego maksimum DtFT jest użycie aproksymacji funkcją kwadratową dla trzech sąsiadujących ze sobą wartości DFT[1]. Zwiększenie stopnia wielomianu, wraz ze zwiększeniem liczby używanych próbek, pozwala na uzyskanie analogicznych formuł – co jednak nie przynosi znaczącej poprawy dokładności otrzymanego estymatora[42].

### 3.4.4 Metoda najmniejszych kwadratów w interpolacji widma DFT

Zagadnienie interpolacji widma DFT realizowane z wykorzystaniem metody najmniejszych kwadratów oraz konkretne propozycje procedur interpolacyjnych zostały przedstawione np. w [128], [175]. Metoda przedstawiona przez Morelliego i in. w [128] wykorzystuje metodę ważonych najmniejszych kwadratów WLS do uzyskania nieiteracyjnej metody wykorzystującej estymator L punktowy:

$$\hat{\lambda}_0 = \frac{N}{2\pi} \arg \left\{ \left( \sum_{k \in L} c_k \right) \mathbf{y}_L^H \mathbf{C} \mathbf{X}_L - \mathbf{y}_L^H \mathbf{C} \mathbf{u}_L \mathbf{u}_L^H \mathbf{C} \mathbf{X}_L \right\} \quad (3.24)$$

gdzie macierz  $\mathbf{C} = \text{diag}\{c_x(l)\}$ ,  $l \in L$ , a kolejne wartości wektorów kolumnowych  $\mathbf{y}_L$  i  $\mathbf{u}_L$  są zdefiniowane za pomocą rosnących liczb całkowitych ze zbioru  $L$ :  $y_L(l) = e^{-j2\pi(k+l)/N} X_{k+l}$  i  $u_L(l) = 1$ . W praktyce estymator korzysta z trzech lub pięciu punktów, dla których optymalne wagi są wyznaczone przez autorów za pomocą optymalizacji *offline* funkcji określającej wartość MSE i wynoszą:

$$c_3 = [0,6969; 1; 0,6969], \quad c_5 = [0,6338; 0,1347; 1; 0,6338; 0,1347] \quad (3.25)$$

Metoda okazuje się dawać lepsze rezultaty od nieiteracyjnych estymatorów wykorzystujących okno prostokątne, prezentowanych dalej w niniejszym rozdziale: Candana [59], Orgunera [136], Quinna [145] i Macleoda [122] dla przypadku pojedynczej oscylacji zespolonej zawartej w sygnale. Jednocześnie osiąga podobne rezultaty jak estymatory iteracyjne Serbesa [158] czy w przypadku estymatora AM [3].

### 3.4.5 Metoda liniowej interpolacji LIDFT

Innym przykładem interpolacji, która nie wykorzystuje bezpośredniej formuły interpolacyjnej, jest metoda liniowej interpolacji DFT (LIDFT) [39]–[44], [54]. Zakłada ona wykorzystanie aproksymacji widma zastosowanego okna czasowego za pomocą funkcji liniowych na przedziałach  $\lambda \in [k, k+1]$  dla widma DFT, lub w rozwinięciu metody, w przypadku użycia techniki uzupełniania zerami, w zagęszczonych przedziałach  $\lambda \in \frac{1}{R}[k, k+1]$ ,

gdzie  $R$  oznacza krotność uzupełniania zerami. Uzyskane współczynniki funkcji liniowej dla danego zakresu  $f(\lambda) = a_k\lambda + b_k$  pozwalają zamodelować wartość prążka DFT używanego do interpolacji jako sumę przecieku widma pochodzącego od składowych sygnału wieloczęstotliwościowego poprzez odpowiednie przesunięcie w częstotliwości i przeskalowanie za pomocą wartości amplitud tych składowych:

$$X_k = \sum_{h=1}^H A_h f(\lambda - \lambda_h) \quad (3.26)$$

Ustalenie wartości parametrów funkcji liniowej dla konkretnego okna wymaga wstępnej identyfikacji składowych, w taki sam sposób jak dla innych metod interpolacji widma, a więc przez znalezienie maksimów lokalnych widma DFT. Dysponując wartościami DFT i ustalonymi parametrami estymacji, możliwe jest wyznaczenie parametrów amplitud  $A_h$  oraz poprawek częstotliwości  $\lambda_h$  wykrytych oscylacji poprzez rozwiązanie układu równań liniowych ze względu na wspomniane parametry składowych. Metoda pozwala modelować wpływ przecieku widma od wielu składowych widmowych bez rozwiązywania nieliniowych zależności, jednak wymaga rozwiązania liniowego równania macierzowego o rzędzie zależnym od liczby estymowanych parametrów.

### 3.4.6 Metody IpDFT z bezpośrednią formułą interpolacyjną

#### Metody z bezpośrednią formułą interpolacyjną wykorzystujące kształt charakterystyki częstotliwościowej okna czasowego

Pozostała część niniejszej pracy skupia się na metodach interpolacji widma IpDFT, które przedstawiają algebraiczną formułę interpolacyjną, i które wykorzystują informację o kształcie charakterystyki częstotliwościowej okna czasowego. W stosunku do metod tego rodzaju używane jest w niniejszej rozprawie także określenie: metody z bezpośrednią formułą interpolacyjną. Najczęściej tego rodzaju metody wykorzystują formuły algebraiczne, które w ogólności przyjmują postać ilorazu wyrażeń zawierających znane parametry oraz prążki DFT.

Równania opisujące relacje zachodzące między kolejnymi punktami DFT służą jako punkt wyjściowy dla wyprowadzenia końcowych formuł interpolacyjnych omawianych metod. W ogólności takie wyrażenia są zależnościami nieliniowymi ze względu na parametr częstotliwości, przez co znalezienie analitycznego rozwiązania jest trudne. Często w metodach IpDFT wykorzystuje się pewne formy aproksymacji dla takich zależności. Dzięki temu końcowa formuła interpolacyjna może przyjąć prostą formę algebraiczną, która charakteryzuje się niską złożonością obliczeniową, oferując jednocześnie dobrą dokładność estymacji.

#### Estymatory nieobciążone IpDFT z niską wariancją

Obecnie dostępnych jest wiele estymatorów nieobciążonych IpDFT, które wykorzystują model z pojedynczą oscylacją zespoloną. Dlatego podstawowym kierunkiem rozwoju takich metod jest poprawa odporności estymacji na szum, a efektywność metody determinowana jest przez uzyskaną wariancję estymatora, najczęściej wyrażoną w stosunku do wariancji estymatora idealnego, określoną przez ograniczenie Craméra-Rao (równanie (2.2)). Większość takich metod wykorzystuje wyłącznie okno prostokątne, ze względu na najmniejszą wartość współczynnika ENBW (3.23).

## Estymatory z redukcją obciążenia wynikającego z obecności w sygnale składowych zakłócających

Opisywane wyżej podejście ma swoje uzasadnienie w pewnej grupie zastosowań, w szczególności tam gdzie estymowana jest częstotliwość mocno zaszumionej oscylacji, a długość pomiaru gwarantuje, że wiele okresów sygnału znajdzie się oknie pomiarowym. Pośrednio dokonywane jest też założenie, że w badanym sygnale nie ma znaczących zakłóceń deterministycznych, tj. nie występują bliskie, niezynchronizowane składowe, które powodują znaczący wzrost obciążenia estymatora. Zasadniczo takie założenia nie obowiązują w znacznej części potencjalnych zastosowań. Stąd też alternatywnym nurtem rozwoju metod interpolacji widma są metody zakładające przyjęcie kompromisu pomiędzy odpornością na zakłócenia losowe a odpornością na występowanie innych składowych w sygnale. Zwykle uzyskuje się to na drodze nałożenia okien czasowych, które pozwalają na redukcję wpływu składowych oddalonych na dokładność estymacji. Przykładem są metody wyprowadzone dla okien z bazą kosinusową [65], okien  $\sin^p$  [79], okien I klasy Rife'a-Vincenta [13] lub okien z poszerzonym listkiem głównym za pomocą operacji splotu [95][174]. Kolejnym sposobem uodpornienia estymatora na tego rodzaju zakłócenia jest uwzględnienie wpływu innych składowych częstotliwościowych w procesie uzyskiwania formuł interpolacyjnych, ze względu na użyty model przecieku widma[36]. Nowsze prace wprowadzają zmodyfikowane formuły interpolacyjne, gdzie obciążenie wprowadzone przez aproksymację jest redukowane przez wprowadzenie poprawionych wersji estymatorów zachowujących nieliniowe zależności[115]. Wprowadzane są nowe estymatory z formułami jednokrokowymi, ale także przedstawiane są propozycje poprawienia efektywności estymacji z wykorzystaniem technik iteracyjnych lub uzupełnienia estymacji o dodatkowe etapy. Przykładowo, po wstępnej interpolacji za pomocą klasycznego podejścia IpDFT i wyznaczeniu parametrów sygnału, dodawany jest kolejny krok interpolacji wykorzystujący dodatkowe wartości DtFT [117], integracji metody ważonej najmniejszych kwadratów [128] lub przez dodatkową interpolację parabolą [75][74].

W kolejnych rozdziałach przedstawiony został opis wybranych metod interpolacji widma dla obu wymienionych wyżej klas.

## 3.5 Metody IpDFT służące do estymacji częstotliwości sygnału złożonego z pojedynczej składowej zespolonej

### 3.5.1 Widmo sygnału złożonego z pojedynczej oscylacji zespolonej

W niniejszym podrozdziale rozpatrywany jest sygnał  $x(n)$ , który składa się z pojedynczej oscylacji zespolonej o amplitudzie zespolonej  $B_0$  i częstotliwości unormowanej  $\lambda_0$  wraz z nałożonym oknem czasowym  $w(n)$  i jest definiowany zgodnie z modelem (3.2) jako:

$$x(n) = w(n)B_0e^{j2\pi\lambda_0\frac{n}{N}} \quad (3.27)$$

W literaturze używane są także określenia: zespolony sygnał harmoniczny lub sinusoida zespolona (ang. *complex sinusoid*), w odróżnieniu do sygnału sinusoidalnego, przyjmującego wartości rzeczywiste.

Uzyskane z sygnału  $x(n)$  widmo DFT odpowiada jednemu składnikowi widma (3.8) z częstotliwością podstawową  $\lambda_h = +\lambda_0$ :

$$X_k = X_k^{(+1\lambda_0)} = A_0e^{j\varphi_0}W(\lambda - \lambda_0) \quad (3.28)$$

### 3.5.2 Estymatory dwupunktowe

#### Klasyczne metody IpDFT

Dokładne rozwiązanie analityczne dla estymacji dwupunktowej zostało opublikowane w [148] dla przypadku okna prostokątnego:

$$\lambda = \frac{N}{2\pi} \arccos \frac{Z_2 \cos(2\pi(k \pm 1)/N) - Z_1 \cos(2\pi k/N)}{Z_2 - Z_1} \quad (3.29)$$

gdzie:

$$Z_1 = \text{Im}\{X_k\} \frac{K_{\text{opt}} - \cos(2\pi k/N)}{\sin(2\pi k/N)} + \text{Re}\{X_k\} \quad (3.30)$$

$$Z_2 = \text{Im}\{X_{k \pm 1}\} \frac{K_{\text{opt}} - \cos(2\pi(k \pm 1)/N)}{\sin(2\pi(k \pm 1)/N)} + \text{Re}\{X_{k \pm 1}\} \quad (3.31)$$

$$K_{\text{opt}} = \frac{\sin(2\pi k/N) \text{Im}\{X_{k \pm 1} - X_k\} + \cos(2\pi k/N) \text{Re}\{X_{k \pm 1} - X_k\}}{\text{Re}\{X_{k \pm 1} - X_k\}} \quad (3.32)$$

Złożoność powyższej formuły uzyskanej dla modelu zespolonej oscylacji i dwóch zespolonych wartości prążków oznacza, że dokładne rozwiązania dla bardziej skomplikowanych przypadków (inne okna czasowe, większa liczba używanych prążków, bardziej złożony model sygnału) będą trudniejsze do wyprowadzenia i potencjalnie na tyle złożone, że staną się trudne to wdrożenia w praktycznym systemie. Dlatego większość opisywanych dalej metod wykorzystuje jakąś formę przybliżeń we wprowadzanych zależnościach. Sama metoda (równanie (3.29)) daje lepsze rezultaty w przypadku niskich wartości SNR i braku innych zakłóceń, w porównaniu do metod wykorzystujących aproksymację[5], [157].

Rozwiązanie analityczne, w formie ze skróconym zapisem, pojawiło się w pracy Bertocco i in. [32], [115]:

$$\delta_k = \frac{N}{2\pi} \arg \left\{ \frac{X_k - X_{k \pm 1}}{X_k - e^{\pm(-j2\pi/N)} X_{k \pm 1}} \right\} \quad (3.33)$$

gdzie  $\delta_k$  oznacza poprawkę względem prążka  $X_k$ , gdzie  $\lambda = k + \delta_k$ .

Metody IpDFT w większości wykorzystują pewne przybliżenia i aproksymacje do opisu charakterystyki częstotliwościowej okna, co umożliwia uzyskanie prostszej formy estymatora i pozwala na wykorzystanie innych okien czasowych niż okno prostokątne. Jednym z wcześniejszych podejść do uzyskania estymatora tego rodzaju jest klasyczna metoda zaproponowana przez Rife'a i Vincenta[149] wykorzystująca okna MSD. Metoda wykorzystuje współczynnik złożony z dwóch maksymalnych wartości widma amplitudowego DFT:

$$\alpha_k = \frac{|X_{k \pm 1}|}{|X_k|} \quad (3.34)$$

Wykorzystując wartość współczynnika  $\alpha_k$ , estymator wyznacza wartość przesunięcia  $\delta_k$ :

$$\delta_k = \frac{H\alpha_k - (H - 1)}{\alpha_k + 1} \quad (3.35)$$

gdzie parametr okna  $H$  to współczynnik definiowany wcześniej w (3.19). Z powyższego równania wynikają estymatory dla okna prostokątnego ( $H = 1$ )[94]:

$$\delta_k = \frac{\alpha_k}{\alpha_k + 1} \quad (3.36)$$

oraz okna Hanninga ( $H = 2$ )[87]:

$$\delta_k = \frac{2\alpha_k - 1}{\alpha_k + 1} \quad (3.37)$$

Estymator (3.35) jest dalej używany i rozwijany, np. przez Offeliego i in. [132]–[134] czy przez Belegę i in. [13], [15], [19], który z kolei posługuje się nazwą IpDFTc (ang. *classic IpDFT*)[23].

Wybór prążka  $X_{k\pm 1}$  dla dwupunktowej estymacji w interpolatorach przedstawionych powyżej zależy od wartości znaku przesunięcia częstotliwości  $\delta_k$ :

$$X_{k\pm 1} = \begin{cases} X_{k+1}, & \text{gdy } |X_{k+1}| > |X_{k-1}| \\ X_{k-1}, & \text{gdy } |X_{k+1}| < |X_{k-1}| \end{cases} \quad (3.38)$$

Z metodami interpolacji widma, które wymagają podobnego wyboru, wiąże się możliwość wprowadzenia nowego źródła błędu do estymacji, który jest związany ze złym wyborem kierunku interpolacji. Dotyczy to jednak wyłącznie estymatorów wykorzystujących wartości modułu widma. Taka sytuacja zachodzi, gdy estymowana częstotliwość jest bliska spełnienia warunku próbkowania koherentnego  $\delta_k \approx 0$  bin, a w sygnale występują zakłócenia losowe.

### Wykorzystanie wartości zespolonych

Analogiczne jak dla przypadku estymatorów (3.36) i (3.37), opracowane zostały także metody wykorzystujące wartości zespolone w celu konstrukcji współczynników wykorzystywanych w estymatorach. Yang i in. w [179] stosują zespolony współczynnik:

$$\alpha_k = \frac{X_{k\pm 1}}{X_k} \quad (3.39)$$

który pozwala uzyskać estymator dla przypadku okna prostokątnego:

$$\delta_k = -\frac{\alpha_k}{1 - \alpha_k} \quad (3.40)$$

Wcześniej Quinn w pracach [144], [145] wprowadza powyższy estymator wraz z kryterium doboru prążka  $X_k$  (prążek przed  $k - 1$  lub  $k + 1$  względem maksimum widma amplitudowego) dla operatora  $\text{Re}\{\cdot\}$ , w formie:

$$\delta_{q1} = \frac{\text{Re}\left\{\frac{X_{k-1}}{X_k}\right\}}{1 - \text{Re}\left\{\frac{X_{k-1}}{X_k}\right\}} \quad (3.41)$$

oraz

$$\delta_{q2} = \frac{\text{Re}\left\{\frac{X_{k+1}}{X_k}\right\}}{\text{Re}\left\{\frac{X_{k+1}}{X_k}\right\} - 1} \quad (3.42)$$

gdzie warunek wyboru to  $\delta_k = \delta_{q1}$ , jeśli oba estymatory przyjmują wartości większe od zera lub  $\delta_k = \delta_{q2}$  w przeciwnym przypadku. Wersja tego estymatora z dokładnym rozwiązaniem przedstawia się jako[115]:

$$\delta_{qx} = \frac{N}{\pi} \text{tg}^{-1} \left\{ \text{tg} \left( \frac{\pi}{N} \right) \delta_{qx} \right\} \quad (3.43)$$

gdzie  $x \in \{1,2\}$  oznacza numer metody. Aboutanios pokazuje w [2] związek powyższego estymatora z dokładnym rozwiązaniem otrzymanym przez Bertocco [32] za pomocą linearyzacji funkcji  $\text{tg}(x)$ ,  $\text{tg}^{-1}(x)$  i  $\sin^{-1}(x)$ .

Li i Chen w [112] przedstawiają wersję powyższych estymatorów dla przypadku zastosowania okna Hanninga i wartości zespolonych bez wyboru kierunku:

$$\delta_k = -\frac{2\alpha_k + 1}{1 - \alpha_k} \quad (3.44)$$

W niniejszej rozprawie został przedstawiony wariant tego estymatora dla przypadku okien GMSD:

$$\delta_k = \frac{(p+1)X_{k+1}}{\Delta^1 X_k} + \frac{p}{2} \quad (3.45)$$

będący tematem analizy w dalszych rozdziałach.

### Wykorzystanie dodatkowych wartości DtFT i metody iteracyjne

Dla pewnej klasy estymatorów z bezpośrednią formułą interpolacyjną można otrzymać redukcję wariancji i obciążenia przy pomocy zastosowania procedury iteracyjnej związanej z wykorzystaniem dodatkowych wartości DtFT. Estymator przedstawiony przez Aboutaniosa i Mulgrewa (znany w literaturze jako estymator AM) wykorzystuje dwie wartości DtFT oddalone symetrycznie o 0.5 bin od prążka z lokalnym maksimum modułu [3]. Autorzy pokazują, że algorytm jest zbieżny już po dwóch iteracjach, a więc złożoność obliczeniowa algorytmu zwiększa się o  $2 \cdot 2N$  operacji zespolonego mnożenia i  $2 \cdot 2(N-1)$  operacji zespolonego dodawania. Podstawą algorytmu iteracyjnego jest bezpośrednia formuła interpolacyjna: w wersji z wartościami zespolonymi:

$$\delta_i = \delta_{i-1} + \Delta\delta_i = \delta_{i-1} + \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \frac{X_{k+\delta+0.5} + X_{k+\delta-0.5}}{X_{k+\delta+0.5} - X_{k+\delta-0.5}} \right\} \quad (3.46)$$

oraz w wersji z wartościami widma amplitudowego:

$$\delta_i = \delta_{i-1} + \Delta\delta_i = \delta_{i-1} + \text{Re} \left\{ \frac{|X_{k+\delta+0.5}| - |X_{k+\delta-0.5}|}{|X_{k+\delta+0.5}| + |X_{k+\delta-0.5}|} \right\} \quad (3.47)$$

Analizując estymator można zauważyć, że im dokładniej znana jest wartość  $\delta_i$ , tym wartość poprawki  $\Delta\delta_i$  staje się mniejsza, a wartość  $|X_{k+\delta+0.5}| - |X_{k+\delta-0.5}|$  dąży do zera. Na tej podstawie autorzy przedstawiają procedurę iteracyjną, mającą na celu poprawę dokładności estymacji częstotliwości. Wariancja estymatora osiąga wartość większą o zaledwie 1.47% względem ograniczenia Craméra-Rao, w przypadku asymptotycznym dla  $N \gg 1$ . Autorzy pracy wykazują, że przedstawiona procedura iteracyjna jest zbieżna dla przypadku modelu złożonego z pojedynczej składowej zespolonej i szumu. Autorzy dodatkowo przedstawiają wariant wieloetapowy dla tej metody poprzez dodanie współczynnika kompensacji błędu systematycznego estymatora [2].

Minhas i Aboutanios w pracy [126] proponują modyfikację estymatora AM redukującą złożoność obliczeniową metody poprzez wykorzystanie estymatora Quinna [144] przy iteracji inicjującej. W [118] zaproponowano wariant tego estymatora dla przesunięć punktów DtFT o  $q \pm \frac{1}{2}$ , gdzie  $q$  jest wartością stałą. Metoda pozwala na uzyskanie lepszych wyników dla nieiteracyjnego wykorzystania estymatora AM. W [24] Belega i in. przedstawiają wersję algorytmu AM dla okien z bazą kosinusową.

Uogólnienie metody z estymatorem AM przedstawia Serbes w [158]. Estymator (3.50) jest rozszerzony o możliwość użycia punktów DtFT dla  $q \in [-0.5, 0.5]$  gdzie:

$$\delta_i = \delta_{i-1} + \Delta\delta_i = \delta_{i-1} + \frac{1}{c(q)} \operatorname{Re} \left\{ \frac{X_{k+\delta+q} + X_{k+\delta-q}}{X_{k+\delta+q} - X_{k+\delta-q}} \right\} \quad (3.48)$$

oraz

$$c(q) = \frac{1 - \pi q \cot(\pi q)}{q \cos^2(\pi q)} \quad (3.49)$$

Autor pokazuje, że użycie mniejszych wartości  $q$  niż 0.5 umożliwia otrzymanie lepszych rezultatów kosztem zwiększenia liczby iteracji do osiągnięcia asymptotycznej zbieżności z CRLB. Stąd też autor wprowadził modyfikację powyższego podejścia poprzez zmianę formuły dla pierwszej iteracji wykorzystując estymator z kompensacją obciążenia przez korekcję fazy współczynników DFT, zaproponowanej przez Liao i Lo [114]. Przedstawiona metoda hybrydowa pozwala na zmniejszenia liczby iteracji i złożoności obliczeniowej do poziomu odpowiadającej oryginalnemu estymatorowi AM. Liao i Lo przedstawiają w [115] analityczne rozwiązanie bez obciążenia:

$$\Delta\delta_i = \frac{N}{\pi} \sin^{-1} \left\{ \sin \left( \frac{\pi}{N} \right) \operatorname{Re} \left\{ \frac{X_{k+\delta+0.5} + X_{k+\delta-0.5}}{X_{k+\delta+0.5} - X_{k+\delta-0.5}} \right\} \right\} \quad (3.50)$$

oraz w wersji z wartościami widma amplitudowego:

$$\Delta\delta_i = \frac{N}{2\pi} \operatorname{tg}^{-1} \left\{ \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2N} \right) \operatorname{Re} \left\{ \frac{|X_{k+\delta+0.5}| - |X_{k+\delta-0.5}|}{|X_{k+\delta+0.5}| + |X_{k+\delta-0.5}|} \right\} \right\} \quad (3.51)$$

### Nieiteracyjna wersja estymatora AM

Metoda NIA (*ang. Noniterative and Accurate*) jest metodą nieiteracyjną wykorzystującą estymator obciążony [66], w której zamiast procedury iteracyjnej zastosowanej w metodzie estymatora AM, użyta jest dodatkowa zależność eliminująca obciążenie tego estymatora. Metoda charakteryzuje się wariancją zbliżoną do metod z iteracjami [3] (estymator AM) i [126]. Praca wprowadza algorytm interpolacji funkcją sinc (dla fazy estymacji precyzyjnej) z użyciem dwóch punktów DtFT oddalonych symetrycznie o odległość  $\pm 0.5$  bin od wartości estymacji wstępnej. Interpolacja opiera się na wykorzystaniu estymatora AM (tutaj oznaczonego jako  $\hat{\mu}_b$ ), a więc wymaga obliczenia wartości modułu dwóch punktów DtFT  $|X_{\delta+0.5}|$  i  $|X_{\delta-0.5}|$ , a następnie w drugim kroku eliminowane jest obciążenie tego estymatora poprzez zastosowanie wzoru na wynikową estymację:

$$\hat{\mu} \approx \hat{\mu}_b \left( 1 + \frac{\pi^2}{12N^2} \right) - \frac{\hat{\mu}^3 \pi^2}{3N^2} \quad (3.52)$$

Ograniczenia związane z użyciem wartości modułów prążków (zależność dokładności metody względem wartości  $\delta$ ) są rekompensowane poprzez uzależnienie formuły interpolacyjnej od pierwszej uzyskanej wartości przesunięcia  $\delta$ , podobnie jak w pracy Liao i Lo [114].

### 3.5.3 Metody wielopunktowej IpDFT

Zastosowanie więcej niż dwóch prążków DFT w formule IpDFT wiąże się z możliwością uzyskania nowych i pożądanymi właściwościami estymatora. Przykładowo, nieiteracyjne estymatory opisywane dalej w tym rozdziale (rozdział 3.6), które realizują eliminację składowej sprzężonej, wykorzystają przynajmniej trzy punkty DFT. Kosztem takiego podejścia

jest zwykle zwiększona wrażliwość estymatora na szum [14], [24]. Z drugiej jednak strony, większa liczba punktów nie oznacza automatycznie, że formuła estymatora realizuje dodatkową funkcjonalność. Przykładem są estymatory, które używają dowolnie wybraną liczbę prążków DFT do estymacji, jak np. w [136] co niekoniecznie przekłada się na efektywność estymatora.

### Eliminacja wpływu składowych oddalonych

Przykładem wykorzystania estymatora z większą liczbą wykorzystywanych punktów jest trzypunktowy estymator Agreža, który bierze pod uwagę wpływ składowych oddalonych i modeluje ten wpływ za pomocą stałej, dla składowej  $h$  (zakładając  $\lambda_0 \ll \lambda_h$ ) oddalonej od wybranego indeksu  $k$  [5]:

$$C_{\text{long-range}} = |X_{k-1}^{(h\lambda_0)}| \approx |X_k^{(h\lambda_0)}| \approx |X_{k+1}^{(h\lambda_0)}| \quad (3.53)$$

tzn. moduł wartości przecieku widma dla punktu  $X_k$ , pochodzący od składowej oddalonej, przyjmuje w przybliżeniu te same wartości jak dla punktów sąsiadujących. Dodatkowo własność okresowości charakterystyki okna prostokątnego (3.12) (a dokładniej postać czynnika  $e^{-j\pi\lambda(N-1)/N}$  funkcji widmowej okna) pozwala stwierdzić, że wartość  $X_k^{(h\lambda_0)}$  przyjmuje przeciwny znak wobec wartości sąsiadującej  $X_{k\pm 1}^{(h\lambda_0)}$ . Stąd autor pokazuje, że wartość współczynnika utworzonego z sumy wartości modułów punktów sąsiadujących jest niewrażliwa na obecność innych składowych oddalonych, m.in. wartość współczynnika  $\alpha_k$  zdefiniowanego jako:

$$\alpha_k = \frac{|X_k| + |X_{k\pm 1}|}{|X_k| + |X_{k\mp 1}|} \quad (3.54)$$

Jeśli założyć, że w sygnale oprócz składowej podstawowej znajduje się pojedyncza składowa oddalona, wtedy ten sam współczynnik można wyrazić jako [5]:

$$\alpha_k = \frac{|X_k^{(\lambda_0)}| + C_{\text{long-range}} + |X_{k\pm 1}^{(\lambda_0)}| - C_{\text{long-range}}}{|X_k^{(\lambda_0)}| + C_{\text{long-range}} + |X_{k\mp 1}^{(\lambda_0)}| - C_{\text{long-range}}} = \frac{|X_k^{(\lambda_0)}| + |X_{k\pm 1}^{(\lambda_0)}|}{|X_k^{(\lambda_0)}| + |X_{k\mp 1}^{(\lambda_0)}|} \quad (3.55)$$

Stąd więc wynika, że skonstruowany współczynnik jest odporny na wpływ pojedynczej składowej oddalonej. Powyższe rozumowanie można rozszerzyć na przypadek wielu składowych. Zatem wartość współczynnika (3.54) nie powinna zależeć od obecności składowych oddalonych w sygnale, a więc i na formułę interpolacyjną wykorzystującą ten współczynnik. Na podstawie współczynnika (3.54) Agrež w tej samej pracy uzyskał trzypunktowy estymator dla okna prostokątnego i Hanninga:

$$\delta_a = c_N \frac{1 - \alpha_k}{1 + \alpha_k} = c_N \left( \frac{|X_{k+1}| - |X_{k-1}|}{|\Delta^2 X_{k-1}|} \right) \quad (3.56)$$

gdzie  $c_N = (H + \frac{1}{2})$ . Bardzo zbliżona formuła interpolacyjna do powyższej została również użyta już wcześniej w [7], [87], dla przypadku całej rodziny okien I klasy Rife'a-Vincenta, gdzie liczona jest wartość średnia z estymaty dla dwóch kierunków estymacji. Powyższa zależność występuje też u Belegi [12], przy okazji wyprowadzenia metody z 5 i 7 punktami DFT. Duda i Barcentewicz [79] wprowadzają powyższy estymator dla przypadku okien  $\sin^p$ . Z kolei Agrež i Streamfelj w [166] rozszerzają swój estymator dla okien I klasy Rife'a-Vincenta dla przypadków estymacji dwupunktowej, trzypunktowej (IDFT-3p) i pięciopunktowej (IDFT-5p).



## Estymatory Jacobsena i Candana

Popularna praca Candana [58] przedstawia formalne wyprowadzenie trzypunktowej formuły interpolacyjnej uzyskanej wcześniej za pomocą obserwacji empirycznych przez Jacobsena [93], na estymatorze korzystającym z interpolacji parabolą i uzupełnia ją o współczynnik korekcji obciążenia  $c_N$ :

$$\delta_c = c_N \operatorname{Re} \left\{ \frac{X_{k+1} - X_{k-1}}{\Delta^2 X_{k-1}} \right\} \quad (3.57)$$

gdzie wartość współczynnika  $c_N$  jest zdefiniowana jako:

$$c_N = \frac{\operatorname{tg}(\pi/N)}{\pi/N} \quad (3.58)$$

dla okna prostokątnego. W przypadku gdy  $N \rightarrow \infty$ , wartość współczynnika  $c_N \rightarrow 1$  i pokrywa się z estymatorem Jacobsena. Współczynnik gwarantuje wysoką efektywność algorytmu, nawet dla wysokich wartości SNR i małej liczby próbek  $N$ .

Metoda jest dalej rozwijana przez autora w [59], gdzie zamieścił wyrażenie opisujące maksymalne błędy estymatora, w tym na wariancję estymatora i wyrażenia opisujące zakresy SNR, dla którego wartość wariancji estymatora dąży do ograniczenia Craméra-Rao. Autor otrzymuje także wyrażenia opisujące obciążenie dla estymatora Jacobsena [93]:

$$\delta_j = \operatorname{tg}(\pi\delta/N) \frac{\sin(2\pi/N)}{2\sin^2(\pi/N)} \quad (3.59)$$

gdzie  $\delta_j$  oznacza estymator Jacobsena, a  $\delta$  jest estymatorem nieobciążonym. Bezpośrednio z tej zależności wynika również zależność dla poprawionego estymatora. Po zastosowaniu współczynnika korekcji  $c_N$  do obu stron równania zależność upraszcza się do:

$$\delta_c = \frac{\operatorname{tg}(\pi\delta/N)}{\pi/N} \quad (3.60)$$

gdzie  $\delta_c$  oznacza poprawiony estymator Candana. Autor przedstawia propozycję redukcji obciążenia poprzez wykorzystanie funkcji odwrotnej do tej relacji dla precyzyjnego obliczenia wartości  $\delta$ . Poprawka sprawdza się dla dużych wartości SNR, gdzie obciążenie jest składnikiem dominującym. W pracy [136] autorzy rozszerzają metodę o możliwość użycia dodatkowych wartości DFT, co w pewnych przypadkach może skutkować polepszeniem właściwości statystycznych. Metoda opisana w pracy [60] jest uogólnieniem opisywanej metody o przypadek użycia z dowolnymi oknami za pomocą modyfikacji współczynnika korekcji  $c_N$ . Współczynnik jest uzyskany poprzez zastosowanie aproksymacji wielomianem, podobnie jak w pracy Dudy[78]. Dodatkowo praca przedstawia możliwość rozszerzenia metody do wersji iteracyjnej poprzez użycie informacji o wstępnej estymacie  $\delta_c$  i ponownym zastosowaniu metody tym razem dla sygnału czasowego zmodulowanego w dziedzinie czasu. W ten sposób charakterystyka błędu względem oddalenia estymaty  $\delta$  od prążka  $k$  zostaje wypłaszczona. Technika ta jest powielana też w nowszych metodach np. w [66].

W pracy [24] Belega i in. przedstawiają wersję algorytmu Candana dla okien z bazą kosinusową i wariant tej metody z wartościami z widma amplitudowego.

## Estymatory z iteracyjnym doбором wartości IpDFT

Jednym z nowszych trendów w dziedzinie metod interpolacji widma IpDFT jest wprowadzanie estymatorów trzypunktowych, które realizują pomiar częstotliwości w sposób iteracyjny, za pomocą wyznaczania nowych punktów DtFT, w analogiczny sposób jak dla dwupunktowego estymatora AM [81], [82], [117], [172].

W pracy [81] autorzy wprowadzają trzypunktowy estymator TDSL (ang. *Three DFT Spectral Lines*) do zastosowania z procedurą iteracyjną, analogiczną jak dla estymatora AM. Podstawowa formuła wykorzystuje prążek DFT z maksymalną amplitudą (faza wstępna) i dwie wartości DtFT rozmieszczone w dowolny sposób na listku głównym:

$$\delta = \frac{N}{\pi} \operatorname{tg}^{-1} \left\{ \frac{(|X_{k+p}| - |X_{k-p}|) \sin(\pi p/N)}{(|X_{k+p}| \pm |X_{k-p}|) \cos(\pi p/N) \mp 2 \cos(\pi p) |X_k|} \right\} \quad (3.61)$$

gdzie  $p$  oznacza wybrane przesunięcie względem prążka z największą wartością modułu. Metoda jest dalej rozszerzona na wariant z użyciem okien MSD[82] i stanowi jej uogólnienie.

W pracy [117] autorzy przedstawiają procedurę, która w fazie wstępnej wykorzystuje wyżej opisywany estymator (3.61) w wersji nieiteracyjnej do wstępnego wyszukania przesunięcia częstotliwości  $\delta$ . Do dalszych iteracji metoda wykorzystuje formułę interpolacyjną, wykorzystującą trzy prążki DtFT, które są położone na osi częstotliwości po jednej stronie estymowanej wartości. Estymator jest nazwany TSLI (ang. *Three Spectral Line Interpolation*) i podobnie jak we wcześniejszych metodach, wykorzystuje prążek o maksymalnej amplitudzie oraz dwie wartości DtFT. W zależności od estymaty wstępnej, wybierane jest położenie po jednej stronie w odległości  $|d_1| = 0.1$  i  $|d_2| = 0.2$  bin. Taki asymetryczny wybór punktów wyróżnia metodę na tle innych, gdzie zwykle trzy punkty rozmieszczone są w równych odległościach od punktu z maksymalną amplitudą.

Kolejną z nowszych metod jest metoda zaproponowana przez Weia i in. [172]. Zakłada użycie estymatora trzypunktowego, który jest zdefiniowany dla okna prostokątnego. Estymator wykorzystuje wartości widma amplitudowego i przyjmuje formę podobną do równania metody Agreża (3.56), ale wykorzystuje dwa prążki DtFT oddalone o wartość parametru  $p < 1$ :

$$\delta = \left( \frac{p|X_{k+p}| - p|X_{k-p}|}{|X_{k+p}| + |X_{k-p}| - |X_k| \cos\left(\frac{\pi N}{M} p\right)} \right) \quad (3.62)$$

Metoda wykorzystuje metodę uzupełnienia zerami do  $M$  punktów, gdzie różnica  $M - N$  musi być całkowitą wielokrotnością oryginalnej długości sygnału  $N$ . Procedura iteracyjna zakłada obliczenie trzech dodatkowych punktów DtFT – centralnego poprawionego o estymatę z wcześniejszej iteracji  $\delta_q$  i dwóch prążków DtFT symetrycznie oddalonych o  $p$ . Autorzy nie wykazują zbieżności estymatora w sposób analityczny, ale dostarczone symulacje sugerują, że potrzebne są dwie iteracje, podobnie jak w przypadku estymatora AM. Estymator osiąga podobne wartości błędu MSE w porównaniu z wcześniej opisywanymi nieiteracyjnymi estymatorami Jacobsena[93], Candana[59] i metodą RCSTL[178] oraz iteracyjnymi metodami AM[3], Fana[82] i Fanga[83]. Autorzy wykazują jednak, że estymator ze względu na użycie techniki uzupełniania zerami wykazuje lepsze właściwości dla skrajnych wartości  $\delta$ .

## Inne wielopunktowe metody IpDFT

Metoda z pracy [113] jest trzypunktowym, nieiteracyjnym estymatorem dla przypadku okna prostokątnego. Uzyskana przez autorów formuła interpolacyjna stosowana jest dla

DFT obliczonej dla długości  $2N$  z zastosowaniem techniki uzupełniania zerami:

$$\delta = \frac{2}{\pi} \operatorname{tg}^{-1} \left\{ \frac{X_k}{2} \left( \frac{1}{X_{k-1}} - \frac{1}{X_{k+1}} \right) \cos \left( \frac{\pi}{2N} \right) \right\} \quad (3.63)$$

Przywoływany estymator w przeprowadzonych symulacjach osiąga lepsze rezultaty od klasycznych metod Rife'a [149], Quinna [144], Macleoda [122] (estymator pięciopunktowy) i estymatorów AM [2], [3].

Warto także odnotować inny nieiteracyjny estymator, który wykorzystuje trzy punkty DFT [173], ale dla którego formuła interpolacyjna została wyprowadzona dla przypadku okien MSD:

$$\lambda_0 = \left( k + \frac{1 - 2H + \sqrt{(2H - 1)^2 + \alpha^2 H^2}}{\alpha} \right) \quad (3.64)$$

gdzie współczynnik  $\alpha$  to stosunek:

$$\alpha = \frac{|X_{k+1}| - |X_{k-1}|}{|X_k|} \quad (3.65)$$

Praca Belegi i in. [14], która jest modyfikacją wcześniejszej metody [13], zakłada estymację trzypunktową i pozwala na otrzymanie formuły interpolacyjnej dla okien MSD:

$$\delta = H \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \quad (3.66)$$

gdzie jej współczynnik to stosunek wyrażony jako:

$$\alpha = \frac{|X_k| + |X_{k+1}|}{|X_k| + |X_{k+2}|} \quad (3.67)$$

Istnieje także klasa metod, dla której nie są podawane analityczne rozwiązania problemu odwrotnego, tzn. znalezienia wyrażenia określającego zależność:

$$\delta = g^{-1}(X_1, X_2, \dots) \quad (3.68)$$

a w zamian podawane są wartości par  $(\delta, g(\delta))$  dla konkretnej wartości proponowanego współczynnika  $\alpha = f(X_1, X_2, \dots)$ . Stąd za pomocą aproksymacji lub interpolacji uzyskiwane są wartości  $\delta$ . Przykładem takiej metody jest metoda, która definiuje współczynnik  $\beta$ , jako funkcję odwrotną do  $\alpha$  [174]:

$$\beta = \frac{|X_2| - |X_1|}{|X_2| + |X_1|} = g(\alpha) \quad (3.69)$$

a następnie za pomocą metody najmniejszych kwadratów przedstawia równania wielomianowe  $W_{\text{param}}(\beta)$  (dla przypadku konkretnego okna) służące do znalezienia wartości  $\delta$ .

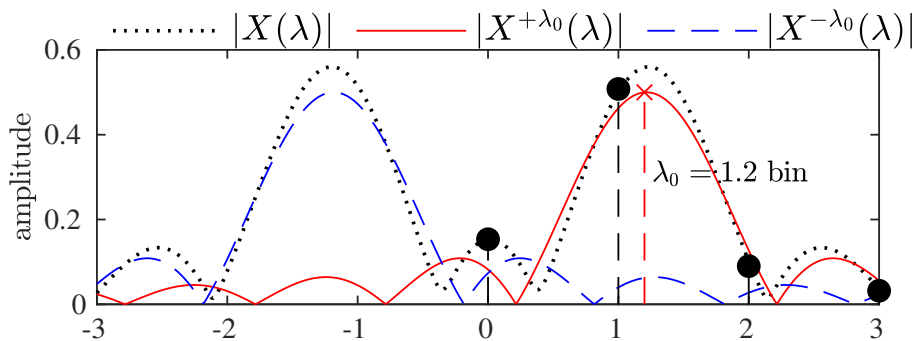
## 3.6 Eliminacja składowej sprzężonej

### 3.6.1 Widmo rzeczywistego sygnału sinusoidalnego

Założenie o obecności pojedynczej składowej widmowej w modelu jest powszechne dla metod interpolowanej DFT i jest stosowane dla wszystkich metod opisywanych w rozdziale 3.5. Takie podejście jest usprawiedliwione w przypadku, gdy wiadomo, że przez

odpowiedni dobór parametrów pomiaru i zastosowanych technik przetwarzania sygnału, zostaje ograniczone w wystarczający sposób zjawisko przecieku widma dla prążków użytych w interpolacji. W takich warunkach wszystkie składowe widmowe są na tyle oddalone od siebie, że przeciek widma, który od nich pochodzi jest pomijalny i nie wpływa na dokładność estymacji.

Dla przypadku, gdy jednak zaistnieje konieczność skrócenia czasu pomiaru, wspomniane założenie może przestać obowiązywać. W takim przypadku spadek wartości  $NT$ , który reprezentuje czas trwania okna pomiarowego, powoduje zmniejszenie wartości częstotliwości znormalizowanej składowej podstawowej  $\lambda_0 = f_0 NT$  i co za tym idzie odległości pomiędzy składowymi widmowymi zmniejszają się. To z kolei powoduje, że składnik przecieku widma pochodzącego od sąsiadujących składowych zwiększa się, tym samym zmniejszając dokładność estymacji. W szczególności zaczyna rosnąć wpływ składowej sprzężonej, która znajduje się w ujemnej części widma, ponieważ odległość pomiędzy tą składową a składową podstawową wynosi zawsze  $2\lambda_0$ . Na rysunku 3.4 została przedstawiona demonstracja tego zjawiska dla rzeczywistego sygnału sinusoidalnego z niską częstotliwością unormowaną  $\lambda_0 = 1.2$  bin. Maksimum modułu funkcji widma DtFT dla rzeczywistej sinusoidy nie pokrywa się ze szczytem modułu funkcji reprezentującej przeciek od składowej podstawowej. Dlatego techniki wykorzystujące wyszukiwanie maksimum lokalnego ciągłego widma DtFT zawsze dostarczą wynik obarczony błędem.



Rysunek 3.4. Demonstracja wpływu przecieku widma składowej sprzężonej na wartości prążków widma amplitudowego DFT, które zostały oznaczone w pobliżu listka głównego składowej podstawowej. Znormalizowana częstotliwość podstawowa wynosi  $\lambda_0 = 1.2$  bin. Pierwsze cztery punkty DFT  $|X(k)|$  zostały oznaczone na rysunkach za pomocą koloru czarnego.

Wyeliminowanie wpływu przecieku widma pochodzącego od składowej sprzężonej w bezpośredniej metodzie IpDFT, za pomocą formuły interpolacyjnej, wymaga uwzględnienia w wyjściowym modelu wartości przecieku widma pochodzącego od dwóch składowych widmowych: składowej podstawowej ( $\lambda_1 = +\lambda_0$  dla modelu (3.8)) i składowej sprzężonej ( $\lambda_2 = -\lambda_0$ ), składających się na widmo rzeczywistej oscylacji sinusoidalnej [37]:

$$X_k = X_k^{(+1\lambda_0)} + X_k^{(-1\lambda_0)} = \frac{A_0}{2j} e^{j\varphi_0} W(k - \lambda_0) - \frac{A_0}{2j} e^{-j\varphi_0} W(k + \lambda_0) \quad (3.70)$$

Dla takich metod pomiar częstotliwości pozostaje dokładny nawet dla bardzo krótkich okien pomiarowych. Stwierdzenie to pozostaje prawdą pod warunkiem, że w sygnale nie pojawi się inna oscylacja o częstotliwości zbliżonej do częstotliwości podstawowej o znaczącej amplitudzie.

### 3.6.2 Formuła interpolacyjna dla okien MSD i GMSD

Istniejące metody realizujące eliminację wpływu składowej sprzężonej bezpośrednio w formule interpolacyjnej, dla okien innych niż prostokątne, opierają się na funkcjach aproksymujących widmo [36], [37], [64]. W ujęciu historycznym, dostępne metody zostały opracowane kolejno dla okna Hanninga, okien rodziny MSD i ostatecznie dla okien GMSD.

#### Estymator dla okna Hanninga

Estymator trzypunktowy z bezpośrednią eliminacją wpływu składowej sprzężonej na wynik pomiaru częstotliwości dla okien I klasy Rife'a-Vincenta został przedstawiony w pracy [36]. Jest on rozwinięciem wcześniejszej metody [64], w której wprowadzono estymator dla przypadku okna Hanninga. Formuła interpolacyjna dla estymatora wykorzystującego okno Hanninga przedstawia się następująco [64]:

$$|\lambda_0| = \sqrt{\Pi_1/\Pi_2} \quad (3.71)$$

gdzie symbole  $\Pi_1$  i  $\Pi_2$  reprezentują wartości wyznaczników:

$$\Pi_1 = \begin{vmatrix} 6 & +3 & -\Delta^1 X_{k-1} \\ -k^2 - 4 & 2k & X_k \\ 6 & -3 & \Delta^1 X_k \end{vmatrix}, \quad \Pi_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & X_{k-1} \\ 1 & 0 & X_k \\ 1 & +3 & X_{k+1} \end{vmatrix} \quad (3.72)$$

Powyzsza formuła obowiazuje dla dowolnego całkowitego indeksu  $k$  wyznaczajacego polozenie prazkow, dla zalozenia  $k \geq 1$ . Zastosowanie wyznacznikow przy wyprowadzeniu metody speinia podobna funkcje, jak dla wczesniej opisywanych metod konstrukcja ilorazow za pomoca wspolczynnikow  $\alpha_k$ , tzn. eliminowane sa identyczne czynniki dla roznych wyrazen w kolumnach, m.in. pozwala to na usuniecie nieznanych parametrów. Dokladne omowienie tej procedury zostalo umieszczone w rozdziale 4. Cyklicznosc wystepujaca wzgledem 1 bin, cechujaca wyrazenie opisujace wartosci transformaty okna  $W(\lambda)$ , pozwala na uproszczenie wynikowej formuly. Warto zwrócic uwage na to, ze w odróżnieniu do wiekszosci wczesniej opisywanych metod, opisywany estymator wykorzystuje wartosci zespolone prazkow DFT.

#### Uogólnienie dla okien klasy MSD

Praca [36] przedstawia wyprowadzenie wartosci wspolczynnikow okien I klasy Rife'a-Vincenta, dla warunku normalizacji  $\max_n w_n = 1$ , w sposob analityczny. Wyprowadzenie zaklada uzycie funkcji aproksymujacej  $W(\lambda)$  widmo okien MSD [12], gdzie w analogiczny sposob jak w [64] zostaje wyprowadzona formuła interpolacyjna. Ostatecznie otrzymany estymator jest zdefiniowany jako:

$$|\lambda_0| = \sqrt{\Pi_1/\Pi_2} \quad (3.73)$$

a symbole  $\Pi_1$  i  $\Pi_2$  reprezentują wartości wyznaczników:

$$\Pi_1 = \begin{vmatrix} (2H-1)H & (2H-1) & -\Delta^1 X_{k-1} \\ -k^2 - 4 - H^2 & 2k & X_k \\ (2H-1)H & -(2H-1) & \Delta^1 X_k \end{vmatrix}, \quad \Pi_2 = \begin{vmatrix} 1 & -(2H-1) & X_{k-1} \\ 1 & 0 & X_k \\ 1 & (2H-1) & X_{k+1} \end{vmatrix} \quad (3.74)$$

Symbol  $H$  w powyższych równaniach reprezentuje współczynnik okna MSD (rozdział 3.3.2). Należy zauważyć, że dla wartości parametru  $H=2$  (okno Hanninga), otrzymano

estymator (3.72). Wygodniejsza forma, otrzymana po bezpośrednim rozwinięciu wartości wyznaczników, przedstawia się jako:

$$\lambda_0^2 = k^2 + \operatorname{Re} \left\{ H \frac{(H + 2k)X_{k+1} + 2(H - 1)X_k + (H - 2k)X_{k-1}}{\Delta^2 X_{k-1}} \right\} \quad (3.75)$$

Dla powyższego estymatora częstotliwości praca [38] wprowadza także stowarzyszone estymatory amplitudy i fazy, w kontekście zastosowania w kontroli mocy dla systemu elektroenergetycznego. Warto także zaznaczyć, że omawiana metoda pojawia się także w literaturze pod nazwą IpDFT-EIF[17], [18], [22], [23], [177], [183]. Dokładniejsze analizy symulacyjne i eksperymentalne przedstawionej metody pozwoliły na określenie: wpływu szumu kwantowania dla  $b$ -bitowego przetwornika ADC na dokładność estymacji [50], [98], [102], charakterystyk błędu wynikającego z obecności w sygnale zakłóceń harmonicznym [22], [101], wpływu błędu wynikającego z obecności w sygnale zakłóceń losowych [103], [106] oraz charakterystyk błędu systematycznego ze względu na wykorzystywane parametry metody [96]. Analiza porównawcza potwierdziła poprawę skuteczności względem dostępnych metod interpolacji widma w przypadku krótkich czasów pomiaru [18], [49], [105].

### Uogólnienie dla okien klasy GMSD

Podobnie jak dla bazy kosinusowej (równanie 3.13), możliwe jest otrzymanie współczynników okien bazy sinusoidalnej, dla których okno czasowe jest maksymalizowane pod względem nachylenia listków bocznych. Zależności określające wartości współczynników zostały uzyskane w sposób analityczny[37], analogicznie do wyprowadzenia uzyskanego dla okien MSD[36]. Autorzy przytaczanych prac przedstawiają także wyrażenia opisujące funkcję aproksymującą obejmującą widmo obu klas okien, tj. okien o bazie kosinusowej i okien o bazie sinusoidalnej[37]. Takie podejście okazuje się o tyle usprawiedliwione, że postać czasowa uogólnionych okien może zostać sprowadzona do wyrażenia  $\sin^p(\pi n/N)$ , gdzie okna I klasy Rife'a-Vincenta (baza kosinusowa) są reprezentowane dla wartości parzystych parametru całkowitego  $p$ . Z kolei wspólne wyrażenie funkcji aproksymującej widmo pozwala uzyskać estymatory dla całej uogólnionej klasy okien MSD. Wszystkie wspomniane wyrażenia zostały wcześniej podane w rozdziale 3.3.2. Na podstawie uzyskanych wyrażeń został wprowadzony trzypunktowy estymator częstotliwości dla okien GMSD, który stanowi rozszerzenie estymatora (3.75)[37]:

$$\lambda_0^2 = k^2 + \operatorname{Re} \left\{ (p + 2) \frac{(p + 2 + 4k)X_{k+1} + 2pX_k + (p + 2 + 4k)X_{k-1}}{4\Delta^2 X_{k-1}} \right\} \quad (3.76)$$

Wyprowadzenie powyższego estymatora zostało przeprowadzone z uwzględnieniem wpływu składowych oddalonych (ang. *long-range leakage*) na wynik pomiaru oraz postać wielopunktową estymatora[37] (podrozdział 3.7.3).

Dokładniejsze analizy symulacyjne i eksperymentalne przedstawionej metody wykorzystującej okna GMSD pozwoliły na określenie: wpływu szumu kwantowania dla  $b$ -bitowego przetwornika ADC na dokładność estymacji [45], charakterystyk błędu wynikającego z obecności w sygnale zakłóceń harmonicznym [46], [56], [100], wpływu błędu wynikającego z obecności w sygnale zakłóceń losowych [53], [100], oraz charakterystyk błędu systematycznego ze względu na wykorzystywane parametry metody [55]. Analizy dotyczące zastosowania metody w warunkach występowania zakłóceń o charakterze

dynamicznym wykazały skuteczność zastosowania omawianej metody dla szybko zmieniających się wartości estymowanych parametrów [48], [51], [52], [56]. Analiza porównawcza potwierdziła poprawę skuteczności względem dostępnych metod interpolacji widma w przypadku krótkich czasów pomiaru i występowania zakłóceń harmoniczných [47], [56]. Ponadto dla omawianej nieiteracyjnej metody trzypunktowej wykorzystującej okna GMSD i MSD zaproponowano wykorzystanie w systemach realizujących pomiar częstotliwości składowych sygnału elektroenergetycznego [18], [22], [37], [45]–[49], [51]–[53], [55], [56], [100]–[102], [105], [106], w zakresie testowania układów elektronicznych [23], oraz pomiaru częstotliwości drgań systemów mechanicznych [96], [97], [99], [103], [104].

### 3.6.3 Inne metody IpDFT ograniczające wpływ składowej sprzężonej z bezpośrednią formułą interpolacyjną

#### Bezpośrednia eliminacja wpływu składowej sprzężonej dla okna prostokątnego

Bezpośrednia trzypunktowa formuła interpolacyjna wprowadzona przez Wanga i in. [170] wykorzystuje współczynniki złożone z wartości zespolonych widma i pełne analityczne zależności określające kształt charakterystyki częstotliwościowej okna prostokątnego. Takie podejście pozwala na redukcję wartości błędu systematycznego względem metod wykorzystujących funkcję aproksymacji widma. Formuła interpolacyjna przedstawia się jako:

$$\lambda_0 = \cos^{-1} \left( \frac{\alpha_1 X_{k+1} - \alpha_2 X_k - \alpha_3 X_{k-1} + \alpha_4 X_k}{\beta_1 (X_k - X_{k-1}) - \beta_2 (X_k - X_{k+1})} \right) \quad (3.77)$$

gdzie

$$\begin{cases} \alpha_1 = (W_N^k - W_N^{k-1})W_N^k(1 + (W_N^{k+1})^2) \\ \alpha_2 = (W_N^k - W_N^{k-1})W_N^{k+1}(1 + (W_N^k)^2) \\ \alpha_3 = (W_N^k - W_N^{k+1})W_N^k(1 + (W_N^{k-1})^2) \\ \alpha_4 = (W_N^k - W_N^{k+1})W_N^{k-1}(1 + (W_N^k)^2) \end{cases} \quad (3.78)$$

oraz

$$\begin{cases} \beta_1 = 2(W_N^k - W_N^{k+1})W_N^{k-1}W_N^k \\ \beta_2 = 2(W_N^k - W_N^{k-1})W_N^k W_N^{k+1} \end{cases} \quad (3.79)$$

gdzie symbol  $W_N^k$  jest zdefiniowany jako  $W_N^k = e^{-j2\pi k/N}$ . Autorzy przedstawiają analizę wariancji estymatora dla przypadku zaszumionej sinusoidy, gdzie w porównawczych badaniach symulacyjnych metoda cechuje się większą odpornością na zakłócenia losowe niż metoda wykorzystująca formułę (3.75). Symulacje zostały jednak wykonane dla przypadku okna MSD z parametrem  $H = 2$ , mimo że możliwe jest użycie okna prostokątnego  $H = 1$ . Rozwiązanie analityczne w nieco bardziej skomplikowanej formie, posługujące się wartościami rzeczywistymi i urojonymi (bez operacji zespolonych), zostało uzyskane przez Baia i in. [9].

#### Eliminacja wpływu składowej sprzężonej z wykorzystaniem wartości prążków DFT obliczonych dla dwóch różnych okien

Estymacja częstotliwości sygnału sinusoidalnego bezpośrednio uwzględniająca składową sprzężoną jest także realizowana w metodzie Štremfelja i Agreža [165]. Bezpośrednia formuła interpolacyjna konstruowana jest z użyciem współczynników złożonych ze składowej stałej (zerowy prążek DFT) uzyskanych w wyniku obliczenia DFT dla dwóch różnych

okien I klasy Rife'a Vincenta. Ostatecznie proponowany przez autorów estymator przewiduje użycie dwóch okien: prostokątnego i Hanninga. Jednoczesne uwzględnianie wpływu przecieku widma pochodzącego od komponentu z dodatniej i ujemnej części widma pozwala na dokładny pomiar częstotliwości, który może być przeprowadzony nawet dla czasów poniżej dwóch okresów badanego sygnału.

### 3.6.4 Metody pośrednie eliminujące wpływ składowej sprzężonej

#### Eliminacja wpływu składowej sprzężonej za pomocą predefiniowanych wartości funkcji odwrotnej

Trzypunktowy estymator z eliminacją wpływu składowej sprzężonej dla dowolnych okien czasowych został zaproponowany w [183]. Wyrażenie estymatora nie jest jednak bezpośrednią formułą interpolacyjną otrzymaną w wyniku znalezienia rozwiązania równania wygenerowanego przez współczynnik  $\alpha = g(k, \delta)$ , tzn. rozwiązania względem  $\delta$ . Alternatywnie autorzy proponują podejście z tablicą wyszukującą (ang. *look-up table*) zawierającą wartości funkcji  $g^{-1}(\alpha)$  dla danego okna i wartości  $k$ . Znając wartość  $\alpha$  możliwe jest obliczenie szukanej wartości  $\delta$  poprzez użycie interpolacji liniowej i sąsiadujących wartości w tabeli. Współczynnik  $\alpha$  zdefiniowany jest jako:

$$\alpha = \frac{X_{k-1} - X_{k+1}}{X_k} \quad (3.80)$$

W celu ułatwienia interpolacji pomiędzy punktami, zaproponowane są tabele dla funkcji  $\text{Re}\{\alpha\}$  i  $\text{Im}\{\alpha\}$ , wybierane w zależności od fazy prążka  $X_k$ . Wyniki symulacji pokazują [183], że metoda daje lepsze rezultaty niż metody e-IPDFT[151] i zbliżone do zastosowania z estymatorem (3.75).

#### Metody z korekcją za pomocą poprawki

Kolejną opisywaną klasą metod są metody iteracyjne wykorzystujące estymator w fazie wstępnej, który uwzględnia wpływ wyłącznie jednej składowej w pierwszej iteracji do wyznaczenia wstępnych parametrów. Następnie za pomocą wyrażenia określającego błąd estymatora dla estymowanych parametrów realizowany jest ostateczny pomiar (lub zakończona jest iteracja w ramach szerszego algorytmu).

Romano i Paolone w [151] przedstawiają metodę łączącą interpolację z użyciem formuły dwupunktowej zaproponowanej wcześniej przez Liguoriego i in. [116] i uzupełnioną o procedurę iteracyjną[129], która służy eliminacji wpływu składowej sprzężonej poprzez kompensację jej wpływu realizowaną w dziedzinie częstotliwości. Autorzy nazywają metodę e-IPDFT i prezentują wyrażenie na poprawkę dla estymowanych parametrów eliminujące wpływ składowej sprzężonej. Sposób aplikacji poprawki przybiera postać prostego równania wynikającego bezpośrednio z definicji transformaty DFT sygnału sinusoidalnego. Poprawka ma charakter iteracyjny i może być stosowana aż do osiągnięcia określonego kryterium (choć zbieżność metody nie jest analizowana w artykule). Formuła iteracyjna przedstawia się więc następująco:

$$\lambda_0 = \frac{|X_k - \Gamma|}{|X_{k\pm 1} - \Omega|} \quad (3.81)$$



gdzie wielkości  $\Gamma$  i  $\Omega$  kompensują wpływ składowej sprzężonej i obliczane są na podstawie wstępnej estymacji częstotliwości dla transformaty stosowanego okna  $W(\lambda)$ :

$$\begin{cases} \Gamma = \frac{Z^*}{B} W(2k + \delta) \\ \Omega = \frac{Z^*}{B} W(2k \pm 1 + \delta) \end{cases} \quad (3.82)$$

gdzie wielkość  $B = \sum_{n=0}^{N-1} w(n)$ , tzn. jest on współczynnikiem normalizacyjnym dla wybranego okna czasowego. Z kolei wielkość  $Z$  oznacza amplitudę zespoloną uzyskaną za pomocą wstępnej estymacji amplitudy i fazy składowej podstawowej.

### Procedura iteracyjna ograniczająca wpływ składowej sprzężonej

Belega i in. w [28] wprowadzają procedurę iteracyjną nazwaną przez autora IpDFT-IR. Metoda zakłada eliminację wpływu składowej sprzężonej. Bazowa formuła interpolacyjna wykorzystuje dwie wartości DtFT oddalone o siebie o 1 bin, wykorzystując ten sam współczynnik, jak opisany wcześniej (równanie (3.34)), ale przesunięty w częstotliwości o ułamek  $r \in [0; 0,5]$  bin:

$$\alpha = \frac{|X_{k+r}|}{|X_{k-1+r}|} \quad (3.83)$$

Autorzy przedstawiają wyrażenie określające błąd spowodowany wpływem składowej sprzężonej na estymację przestawionego estymatora. Zależność została przedstawiona już wcześniej przez Belegę w [29], na podstawie której zaproponowany został estymator nieiteracyjny dla prążków o indeksach całkowitych DFT. Znalezienie minimum wartości błędu przywoływanego wyrażenia umożliwia określenie kryterium do optymalnego doboru położenia dwóch prążków DtFT za pomocą wartości  $r$ , tj.  $r = \delta$ . Stąd wynika zaproponowana procedura iteracyjna – im dokładniej zostaje wyznaczona wartość  $\delta$  tym błąd spowodowany bliskością składowej sprzężonej staje się mniejszy. Opisany estymator dwupunktowy wykorzystuje okna I klasy Rife'a-Vincenta. Belega i in. przeprowadzają analizę porównawczą opisywanego algorytmu IpDFT-IR w [27] z algorytmem IpDFT-NR, który stanowi modyfikację estymatora AM[3]. Autorzy wykonują analizę błędu losowego i przedstawiają wyrażenia analityczne na wartość całkowitego błędu MSE dla obu estymatorów i definiują kryterium do wyboru jednej z tych metod pod względem częstotliwości unormowanej mierzonego sygnału.

### Wyrażenie na poprawkę dla estymatora AM

Zmodyfikowana wersja estymatora AM została przedstawiona przez Ye i in. [181], w której zastosowano kompensację wpływu składowej sprzężonej dla okna prostokątnego. Autorzy używają metody z [180] (eliminacja wpływu składowych o dowolnej częstotliwości) do usunięcia przecieku widma pochodzącego od składowej sprzężonej. Jest to realizowane poprzez wprowadzenie estymatora jego wartości w postaci poprawki:

$$\Delta X_{k \pm 0.5} = \frac{A}{N} \frac{1 + e^{-j4\pi\delta}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+2\delta \pm 0.5)}} \quad (3.84)$$

gdzie  $A$  oznacza estymator amplitudy. W każdej iteracji estymatora AM (3.50) dwie nowe wartości DtFT korygowane są o poprawkę uzyskaną na podstawie częstotliwości z poprzedniej iteracji. Autorzy wykazują w pracy, że estymator spełnia założenia twierdzenia Banacha o kontrakcji, a więc posiada jeden punkt stały i jest zbieżny do  $\delta$ . Całkowity błąd

MSE estymatora, w przypadku obecności składowej sprzężonej, utrzymuje się na tym samym poziomie co dla metody oryginalnej. Autorzy pokazują, że metoda daje lepsze rezultaty niż omawiana dalej praca Djukanovića [75], dla przypadku dużych wartości SNR. W stosunku do omawianej metody używana jest także nazwa AMc (ang. *AM corrected*)[23].

### Filtracja składowej sprzężonej przez modulację

Djukanović w [75] przedstawia procedurę służącą kompensacji składowej sprzężonej z wykorzystaniem modulacji sygnałem zespolonym. W pierwszym etapie, do wyznaczenia wstępnej wartości częstotliwości  $\lambda_0$ , autor proponuje użycie jednego z estymatorów wykorzystujących okna czasowe: Candana [60], Rife'a Vincenta[149] lub innych. Następnie składowa sprzężona filtrowana jest za pomocą modulacji w dziedzinie czasu:

$$x_m(n) = x(n)e^{j2\pi\lambda_0^n/N} \quad (3.85)$$

co skutkuje przesunięciem cyklicznym (kołowym) widma DFT o  $\lambda_0^c$ . Ponieważ częstotliwość  $\lambda_0^c$  jest zbliżona do wartości prawdziwej  $\lambda_0$ , składowa sprzężona przesunie się w okolice prążka zerowego. Filtracja polega na wyzerowaniu wartości tego prążka dla transformaty  $X_m(k)$  i rekonstrukcji sygnału odfiltrowanego i jego demodulacji:

$$x_f(n) = \text{IDFT}\{X_m(k)\}e^{-j2\pi\lambda_0^n/N} \quad (3.86)$$

Tak uzyskany sygnał służy do wyznaczenia właściwej estymacji częstotliwości za pomocą estymatora AM[3].

### Eliminacja wpływu składowej sprzężonej poprzez zastosowanie specjalizowanego okna czasowego

Belega i Petri w pracy [26] proponują procedurę kompensacji składowej sprzężonej z wykorzystaniem okien czasowych MIR-RSD (ang. *Maximum Image interference Rejection windows with Rapid Sidelobe Decay rate*) [121]. Przywołane okna czasowe wykorzystują parametr  $l$ , który determinuje minimum lokalne charakterystyki amplitudowej okna. Znając wstępną wartość częstotliwości składowej sinusoidalnej możliwe jest zastosowanie okna z parametrem, który zminimalizuje przeciek widma pochodzący od składowej sprzężonej. Autorzy proponują wersję algorytmu IpDFTc (estymator (3.35)) uwzględniającą zaproponowane okna czasowe. Szybkość opadania listków bocznych omawianych okien czasowych to  $6(2H - 3)$  dB/oktawę w porównaniu do okien z maksymalnym tempem opadania listków bocznych MSD które wynosi  $6(2H - 1)$  dB/oktawę.

### Przykład metody wieloetapowej

Estymatory IpDFT mogą służyć jako integralna część szerszej metody służącej estymacji parametrów. Pomysł podzielenia estymacji na kilka etapów (tak jak w poprzednio omawianych metodach Djukanovića [75] czy Romano i Paolone [151]) został zastosowany także przez Belegę i Petriego [23]. Metoda proponowana przez autorów łączy nowy wariant metody interpolacji widma z filtracją składowej sprzężonej (*IpDFTc: corrected DFT*) z klasycznym algorytmem dopasowania funkcji sinusoidalnej (ang. *sine-wave fitting*) za pomocą metody Gaussa-Newtona[108] w wersji z jedną iteracją. Procedura interpolacyjna IpDFTc wykorzystuje wyrażenia określające błąd wynikający z obecności innych składowych w sygnale do kompensacji wpływu składowej sprzężonej[13], [20], [30]. Po wstępnym

etapie wyznaczenia częstotliwości  $\hat{\delta}_0$  z użyciem formuły IpDFTc, wykorzystywana jest liniowa metoda najmniejszych kwadratów w celu ustalenia wartości poprawki  $\varepsilon(t)$ . Wykorzystując rozwinięcie w szereg Taylora modelowanego sygnału  $x(n) = A \sin(2\pi\lambda_0 n + \theta)$  ze składnikiem liniowym, wokół uzyskanej wstępnej wartości  $\hat{\lambda}_0$ , można wykazać, że zmierzony sygnał resztkowy, tzn.  $\varepsilon(n) = x(n) - \hat{A} \sin(2\pi\hat{\lambda}_0 n/N + \hat{\theta})$  jest związany z modelem zależnością  $\varepsilon(n) = \Delta\lambda_0 x(n)$ . Stąd widać, że szukana poprawka  $\Delta\lambda_0$  jest liniowym parametrem modelu  $x(n)$  i można bezpośrednio uzyskać jej wartość za pomocą liniowej metody najmniejszych kwadratów. Efektywność tego podejścia zależy w dużej mierze od dokładności wstępnego określenia wartości  $\hat{\lambda}_0$ . Zatem końcowa wartość estymacji składa się z sumy wartości wstępnej estymacji, poprawki niwelującej wpływ składowej sprzężonej i poprawki wynikającej z zastosowania algorytmu dopasowania sinusoidy. Jak pokazują autorzy, opisywane podejście pozwala uzyskać odporność na szum na takim poziomie, jak w przypadku metod uwzględniającą pojedynczą składową [181], zachowując możliwość eliminacji obciążenia estymatora wynikającego z wpływu składowej sprzężonej.

## 3.7 Eliminacja wpływu innych składowych w sygnale

### 3.7.1 Składowa stała

Wang i in. przedstawiają metodę [171], wzorując się na podejściu wykorzystanym dla estymatora (3.75), która pozwala dodatkowo na uwzględnienie w formule interpolacyjnej wpływu składowej stałej na estymację. Problem występowania składowej stałej w praktycznym systemie może być rozwiązany za pomocą analogowych układów filtrujących lub technik cyfrowego filtrowania, jednak w przypadku pomiaru sygnałów wolnozmiennych systemy takie charakteryzują się długimi stałymi czasowymi w przypadku systemów analogowych lub długimi liniami opóźniającymi w przypadku systemów cyfrowych. Proponowany przez Wanga estymator uwzględnia w modelu sygnału trzy składowe częstotliwościowe, tj. składową podstawową, składową sprzężoną oraz składową stałą. Przeciek widma wynikający z występowania w sygnale niezerowej składowej stałej zaczyna stanowić problem w momencie, kiedy zastosowane jest okno inne niż prostokątne. Wynika to z faktu, że rozszerzony listek główny takiego okna powoduje zmianę wartości prążków DFT znajdujących się przy prążku zerowym. Estymator Wanga wykorzystuje cztery punkty DFT w interpolacji i jest zdefiniowany dla okien MSD z parametrem  $H$ :

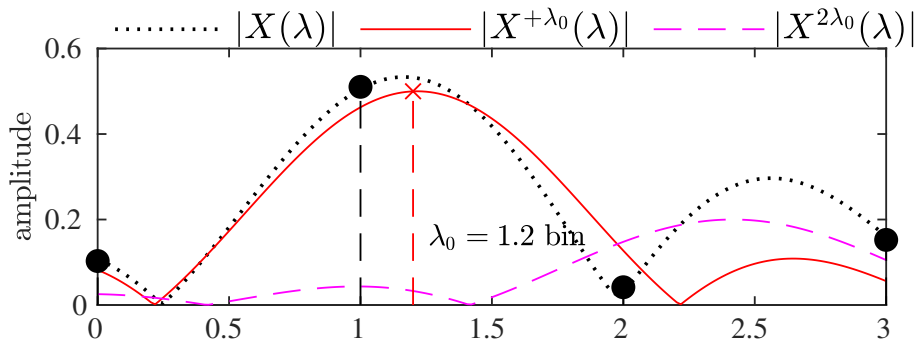
$$|\lambda_0| = \sqrt{\Pi_1/\Pi_2} \quad (3.87)$$

gdzie symbole  $\Pi_1$  i  $\Pi_2$  reprezentują wartości wyznaczników:

$$\Pi_1 = \begin{vmatrix} H(1+H)(2+H) & 3H+3 & X_0 & -3H^2-6H-2 \\ (1-H)(1+H)(2+H) & H+4 & X_1 & H^2-2H-5 \\ (1-H)(2-H)(2+H) & -H+5 & X_2 & H^2+4H-8 \\ (1-H)(2-H)(3-H) & -3H+6 & X_3 & -3H^2+12H-11 \end{vmatrix} \quad (3.88)$$

oraz

$$\Pi_2 = \begin{vmatrix} H(1+H)(2+H) & 3H+3 & X_0 & 1 \\ (1-H)(1+H)(2+H) & H+4 & X_1 & 1 \\ (1-H)(2-H)(2+H) & -H+5 & X_2 & 1 \\ (1-H)(2-H)(3-H) & -3H+6 & X_3 & 1 \end{vmatrix} \quad (3.89)$$



Rysunek 3.5. Demonstracja wpływu przecieku widma pochodzącego od drugiej harmonicznej dla częstotliwości podstawowej  $\lambda_0 = 1.2$  bin.

### 3.7.2 Składowe harmoniczne

Obecność składowych harmoniczných w sygnale, w przypadku krótkiego czasu trwania okna pomiarowego, może okazać się problemem równie poważnym co obecność składowej sprzężonej. Zastosowanie okien czasowych może być wystarczające do usunięcia wpływu składowych oddalonych, jednak jeśli harmoniczne niskiego rzędu mają znaczące wartości amplitudy, to dokładność pomiaru dla metod interpolowanej DFT znacząco się zmniejsza. Odległość składowej podstawowej od składowej harmonicznej trzeciego rzędu wynosi  $2\lambda_0$ , a więc tyle samo co w stosunku do składowej sprzężonej. Gorzej sytuacja wygląda dla składowej harmonicznej drugiego rzędu, dla której ta odległość wynosi jedynie  $\lambda_0$ . Stąd wartość przecieku od tej składowej może być znacząco większa niż od składowej sprzężonej, nawet mimo wielokrotnie mniejszej wartości amplitudy składowej harmonicznej. Demonstracja wpływu drugiej harmonicznej na wartość prążków DFT została przedstawiona na rysunku 3.5.

Jednym z wyników badań prowadzonych w ramach niniejszej rozprawy jest uzyskanie metody pięciopunktowej wykorzystującej okna GMSD[123], która zakłada uwzględnienie przecieku widma pochodzącego od składowych harmoniczných niskiego rzędu. W przypadku użycia odpowiedniego okna czasowego są to przede wszystkim składowa fundamentalna, składowa sprzężona (najbliższa składowa znajdująca się po lewej stronie od używanych prążków DFT) i najbliższa składowa harmoniczna (najbliższa składowa znajdująca się po prawej stronie od używanych prążków DFT). W zależności od praktycznego zastosowania, najbliższa harmoniczna to najczęściej składowa rzędu drugiego lub trzeciego. Proponowana metoda daje możliwość dowolnego wyboru rzędu uwzględnionej składowej.

### Metody IpDFT a składowe harmoniczne

Analiza wpływu zakłóceń harmoniczných na dokładność pomiarów estymatorów z bezpośrednią eliminacją wpływu składowej sprzężonej (3.75) i (3.76) pokazuje, że obecność bliskich harmoniczných nawet o małej amplitudzie skutkuje znaczącym wzrostem obciążenia [22], [37], [46], [100], [101]. Belega i Petri uzyskują analityczne wyrażenia określające błąd powstały w wyniku obecności przecieku widma pochodzącego od składowych harmoniczných dla estymatora (3.75)[22]. Uzyskane zależności mogą stanowić podstawę procedury dwustopniowej, w której pierwotne estymatory są korygowane za ich pomocą w podobny sposób, jak opisano to w rozdziale (3.6.4), przy omawianiu wykorzystania poprawki służącej eliminacji wpływu składowej sprzężonej.

Większość dostępnych metod interpolacji widma z kompensacją wpływu harmonicznych wykorzystuje wstępną analizę harmoniczną sygnału, i dalej posługując się uzyskanymi wartościami parametrów, wykonuje usunięcie składowych harmonicznyc z sygnału oryginalnego w dziedzinie czasu. Prostym przykładem metody z eliminacją wpływu składowych harmonicznyc jest metoda Belegi i in. w pracy [17], w której zastosowano procedurę iteracyjną tego rodzaju. Po wstępnym ustaleniu wartości częstotliwości  $\lambda_0$  za pomocą algorytmu IpDFT, obliczone zostają wartości DtFT dla częstotliwości  $2\lambda_0, 3\lambda_0, \dots, K\lambda_0$ . Otrzymane wartości zespolone służą do wyznaczenia parametrów składowych harmonicznyc, tak jak w przypadku metody bezpośredniej, wykorzystującej jedną wartość widma. Odtworzone sygnały sinusoidalne są odejmowane od sygnału w dziedzinie czasu i dopiero tak zmodyfikowany sygnał zostaje użyty w celu dokonania ostatecznej estymacji za pomocą ponownego użycia algorytmu IpDFT.

### Iteracyjne metody pośrednie

Eliminacja iteracyjna składowych harmonicznyc może odbywać się zarówno w dziedzinie czasu, jak i częstotliwości. Przykładem mogą być najpopularniejsze prace z wcześniej omawianą procedurą e-*IpDFT* [151] i metodą i-*IpDFT* (ang. *iterative IpDFT*) [72]. Są to iteracyjne metody kompensacji wpływu składowych widmowych w dziedzinie częstotliwości. Metoda i-*IpDFT* wykorzystuje wcześniejsze podejście iteracyjne znane z metody e-*IpDFT*[151] w celu uzupełnienia o kompensację wpływu składowych harmonicznyc i interharmonicznyc, jak zostało opisane przy okazji opisu równania (3.82), dla przypadku składowej sprzężonej. W stosunku do wcześniejszej metody, pierwotna metoda *IpDFT* jest zmodyfikowana do postaci estymatora trzypunktowego, który jest zdefiniowany dla trzech pierwszych okien GMSD: prostokątnego, kosinusowego i okna Hanninga, wykorzystując estymator Dudy i Barcentewicza [79]. Otrzymana procedura charakteryzuje się lepszymi charakterystykami błędu niż dla metody e-*IpDFT* w przypadku rzeczywistego sygnału sieci elektroenergetycznej. Jednak metoda i-*IpDFT* [151] staje się nieskuteczna dla krótszych czasów pomiaru (dla wartości  $\lambda_0 < 3$ ), w szczególności gdy obecna jest druga harmoniczna. Jest to spowodowane dużym udziałem wartości przecieku od listka głównego pochodzącego od tych sąsiadujących składowych. Stąd wstępny pomiar parametrów jest obciążony zbyt dużym błędem by korekcja była efektywna. Nowe podejście do problemu estymacji częstotliwości dla krótkich czasów pomiaru i obecności składowej sprzężonej, wraz z uwzględnieniem wpływu drugiej harmonicznyc, przedstawiono w kolejnych rozdziałach niniejszej rozprawy z wykorzystaniem estymatora pięciopunktowego dla okien GMSD. Opisowana powyżej procedura iteracyjna może stanowić dalsze rozszerzenie zaproponowanej metody.

### Przykład metody wieloetapowej z uwzględnieniem wpływu składowych harmonicznyc

Rozszerzając wątek przykładowej metody wieloetapowej, tj. wykorzystania estymatora *IpDFT* i algorytmu dopasowania sinusoidy z rozdziału 3.6.4, warto zwrócić uwagę na drugą procedurę proponowaną przez Belegę i Petriego, tj. metodę HPSF-*IpDFTc* (ang. *harmonic distorted linear sine fit*) [23], która dodatkowo uwzględnia wpływ składowych harmonicznyc w estymacji parametrów sygnału wieloczęstotliwościowego w sposób iteracyjny. Ta wersja różni się od algorytmu PSF-*IpDFTc*, którego opis został zamieszczony w rozdziale 3.6.4 tym, że wstępna estymacja za pomocą algorytmu *IpDFTc* odbywa się dla wszystkich wykrytych składowych harmonicznyc, a nie tylko dla składowej sprzężonej.

Uzyskane parametry służą do obliczenia sygnału resztkowego  $\varepsilon$ , który tym razem składa się z różnicy między modelem  $x(n)$  a sumą sygnałów sinusoidalnych, których parametry zostały uzyskane za pomocą algorytmu IpDFTc [20], [30].

### Formuła bezpośrednia

Formuła interpolacyjna uwzględniająca w modelu rzeczywisty sygnał sinusoidalny oraz wybraną rzeczywistą składową harmoniczną została przedstawiona przez autora niniejszej rozprawy w pracy [123]. Zgodnie z wiedzą autora jest to jedyna bezpośrednia procedura IpDFT dostępna w literaturze, realizująca interpolację widma z uwzględnianiem udziału czterech składowych częstotliwościowych. Metoda jest wyprowadzona dla przypadku okien GMSD i stanowi jedną z metod, których analiza stanowi treść kolejnych rozdziałów niniejszej rozprawy.

### 3.7.3 Eliminacja wpływu innych składowych częstotliwościowych

Głównym środkiem eliminacji wpływu przecieku widma składowych interharmonicznych lub innych zakłóceń pozostaje stosowanie okien czasowych. Jeśli jednak wykryte zakłócenia w sygnale zostają zidentyfikowane jako interharmoniczne, ich wpływ może zostać zredukowany także za pomocą procedur iteracyjnych. Przykładem jest zastosowanie procedury opisywanej wcześniej przy okazji składowych harmonicznych, która realizuje usunięcie wpływu wstępnie wykrytej składowej w dziedzinie częstotliwości [72].

Metody z bezpośrednią formułą, w grupie metod interpolacji widma, mogą modelować wpływ składowych oddalonych za pomocą odpowiedniego konstruowania użytych współczynników zawierających wartości prążków DFT. Przykładem takiej metody jest metoda Agreža [5], wcześniej opisywana przy okazji omawiania formuł trzypunktowych (rozdział 3.5.3), która modeluje sumaryczny wpływ składowych oddalonych dla sąsiadujących ze sobą prążków DFT za pomocą wartości stałej. Takie założenie staje się coraz mniej dokładne w momencie, gdy odległości pomiędzy składowymi widmowymi zmniejszają się. Analizując postać widma można zauważyć, że sumaryczna postać przecieku widma pochodząca od składowych oddalonych nadal zachowuje płaski kształt charakterystyki. Ta cecha sumy wartości listków bocznych obserwowana w widmie może być użyta przez wykorzystanie modelowania wielomianem.

#### Eliminacja wpływu dla składowych oddalonych za pomocą aproksymacji wielomianem

Chen i in. [65] wprowadzają, analogiczny w stosunku do estymatora Agreža (3.56), estymator trzypunktowy, który także modeluje wpływ składowych oddalonych za pomocą stałej i różni się od niego wyłącznie zastosowaniem wartości zespolonych oraz zastosowaniem okien MSD:

$$\delta_a = c_N \left( \frac{X_{k+1} - X_{k-1}}{\Delta^2 X_{k-1}} \right) \quad (3.90)$$

Powyższy estymator zostaje rozszerzony przez autorów na przypadek  $(L + 3)$ -punktowy:

$$\lambda_0 = k + \frac{L}{2} + 1 + \left( \frac{L}{2} + H \right) \frac{\Delta^{L+1} X_k + \Delta^{L+1} X_{k+1}}{\Delta^{L+2} X_k} \quad (3.91)$$

który wynika z zastosowania modelu przecieku widma dla prążka DFT składającego się z sumy przecieku widma pochodzącego od składowej podstawowej oraz wartości wielomianu

modelującego sumaryczny wpływ od innych składowych:

$$X_k = B_0 W(\lambda - \lambda_0) + \sum_{i=0}^L C_i l^i \quad (3.92)$$

gdzie  $B_0$  jest zespoloną amplitudą składowej podstawowej (jak w modelu (3.10)),  $L$  oznacza stopień wielomianu, zaś  $C_i$  współczynniki wielomianu.

Inne podejście do modelowania składowych oddalonych zostało zaproponowane w [37], która to praca definiuje trzypunktowy estymator (3.75) dla okien GMSD. Uwzględnienie wpływu składowych oddalonych (*long-range leakage*) polega na bezpośrednim uwzględnieniu  $L$  oddalonych składowych częstotliwościowych w wyprowadzeniu i skorzystaniu z założenia, że częstotliwość składowych oddalonych jest dużo większa od częstotliwości podstawowej tj.  $|\lambda_h \gg \lambda_0|$ . W wyniku takiego założenia otrzymany został estymator dla  $(L + 3)$  punktów:

$$\lambda^2 = k^2 + \text{Re}\{\varepsilon\} \quad (3.93)$$

gdzie  $\varepsilon$  jest definiowany jako:

$$\varepsilon = (p+L+2) \left[ \frac{(p+L+2)}{4} + (p+L+1) \frac{\Delta^L X_{k+1}}{\Delta^{L+2} X_k + \left(k + \frac{L}{2} + 1\right)} \frac{\Delta^L X_{k+2} - \Delta^L X_k}{\Delta^{L+2} X_k} \right] \quad (3.94)$$

Powyższy estymator upraszcza się do estymatora Chena (3.91), gdy w modelu nie jest uwzględniana składowa sprzężona. Stąd wynika, że założenie o oddalonych składowych z pracy [37] jest równoważny zastosowaniu modelowania przecieku *long-range* za pomocą wielomianu.

## 3.8 Zestawienie właściwości metod interpolacji widma DFT

### 3.8.1 Porównanie jakościowe omówionych metod interpolacji widma DFT

Pozostała część niniejszego rozdziału poświęcona jest zbiorczemu zestawieniu omówionych dotychczas metod interpolacji widma. Wykonana została analiza porównawcza, która ma charakter jakościowy i jej głównym celem jest usystematyzowanie właściwości zebranych metod, a także uwypuklenie najważniejszych aspektów metod zaproponowanych przez autora niniejszej rozprawy, przez porównanie z innymi dostępnymi metodami. Podsumowanie przeprowadzonej analizy wraz ze szczegółowym porównaniem każdej metody zawarte jest w tabelach 3.1, 3.2, 3.3 oraz 3.4.

### 3.8.2 Sposób uwzględnienia przecieku widma w interpolacji

#### Metody z bezpośrednią formułą interpolacyjną

Najprostszym podejściem do uwzględnienia przecieku widma w estymacji jest jej bezpośrednio uwzględnienie w formule interpolacyjnej. Większość omawianych w niniejszej pracy metod interpolacji widma DFT wykorzystuje wstępny model sygnału w celu uzyskania zależności wiążących wartości widma, które są używane w estymacji. Im model sygnału jest bardziej złożony, tym trudniej jest uzyskać estymator nie czyniąc dodatkowych uproszczeń. Dlatego estymatory z jednokrokową formułą interpolacyjną uwzględniają maksymalnie do kilku oscylacji zespolonych. Dostępne estymatory pozwalają na

uwzględnienie w modelu składowej stałej, składowej sprzężonej oraz pojedynczej składowej harmonicznej. Taki sposób uwzględnienia przecieku widma w metodzie reprezentowany jest przez cechy od #1 do #4 w tabeli 3.1.

### **Modelowanie przecieku widma za pomocą stałej lub wielomianu**

Sposobem na przybliżone uwzględnienie przecieku widma pochodzącego od wielu składowych jednocześnie jest aproksymacja stałą lub wielomianem. Jest to technika opisywana w rozdziale 3.7.3 i ma zastosowanie wyłącznie dla składowych oddalonych. Ten sposób uwzględnienia przecieku widma jest reprezentowany przez cechę #5 opisaną w tabeli 3.1.

### **Metody iteracyjne**

Jeśli składowa widmowa nie jest uwzględniona w formule interpolacyjnej danej metody, to nadal możliwe jest usunięcie jej wpływu przez techniki iteracyjne. Tego rodzaju metody wykorzystują estymację parametrów kompensowanej składowej wykonywaną w każdej iteracji do zmniejszenia błędu estymacji. Jest to zwykle realizowane przez modyfikację wartości próbek sygnału lub widma. Ten sposób uwzględnienia przecieku widma jest reprezentowany przez cechę #6 opisaną w tabeli 3.1.

## **3.8.3 Struktura obliczeniowa metod interpolacji widma**

### **Liczba wykorzystywanych wartości widma**

Jedną z ważniejszych charakterystyk metody interpolacji widma jest liczba użytych wartości widma w estymacji. Najprostsze metody wykorzystują dwie wartości DFT lub DtFT. Jest to minimalna liczba, dla której możliwe jest wykonanie interpolacji. Liczba wykorzystywanych wartości widma w estymacji jest oznaczona przez numer #7 opisany w tabeli 3.1.

### **Metody wykorzystujące jednokrokowe formuły interpolacyjne**

Najbardziej korzystnym wyborem z punktu widzenia złożoności obliczeniowej są metody wykorzystujące jednokrokową formułę algebraiczną do estymacji częstotliwości. Często same obliczenia związane z wykonaniem estymacji stanowią jedynie ułamek czasu obliczenia wartości widma i cechują się prostotą implementacji w praktycznym systemie. Warto także zauważyć, że znaczna część innych metod interpolacji widma także wykorzystuje prostą formułę interpolacyjną jako jeden z etapów wstępnych estymacji lub jest użyty w iteracjach metody. Taka forma algorytmu jest reprezentowana przez cechę #8 w tabeli 3.1.

### **Metody wieloetapowe**

Metody wieloetapowe zakładają użycie pewnej ustalonej liczby zależności w sekwencji, gdzie każdy kolejny krok może wykorzystywać informację uzyskaną w kroku poprzednim. Typowym scenariuszem takich metod jest wykorzystanie formuły jednokrokowej do ustalenia wstępnej wartości estymacji częstotliwości, po której zostaje wykorzystane kolejne wyrażenie np. na poprawkę redukującą obciążenie lub kompensację wpływu innych



składowych. Główną różnicą w stosunku do metod iteracyjnych jest to, że metody wieloetapowe zakładają stałą niezmienną liczbę kroków. Każdy z realizowanych kroków związany jest z konkretnym działaniem, np. kompensacji wpływu jednej konkretnej składowej, a wpływ na dokładność pomiaru nie jest w żaden sposób weryfikowany. Taka struktura algorytmu jest reprezentowana przez cechę #9 w tabeli 3.1.

### **Metody iteracyjne**

Głównym założeniem metod interpolacji widma wykorzystujących techniki iteracyjne jest polepszenie dokładności estymacji w każdej iteracji, aż do spełnienia pewnego założonego kryterium. Metody iteracyjne często zakładają kompensację wpływu innych składowych, np. harmonicznych i interharmonicznych (jak opisano wyżej w 3.8.2, przy okazji opisu technik uwzględniania przecieku widma w interpolacji), ale mogą także poprawiać wynik przez optymalizację wyboru wartości użytych parametrów metody lub pomiaru. Istnieje także cała klasa metod wykorzystujących techniki iteracyjne, które polegają na wykorzystaniu dodatkowych wartości widma ciągłego IpDFT w kolejnych iteracjach. W przypadku metod iteracyjnych należy pamiętać o potencjalnym braku zbieżności, w szczególności w przypadku, gdy w sygnale pojawiają się zakłócenia deterministyczne, które zmieniają wyraźnie kształt widma. Taka struktura algorytmu jest reprezentowana przez cechę #9 opisaną w tabeli 3.1.

## **3.8.4 Widmo sygnału w metodach interpolacji**

### **Wykorzystywanie widma amplitudowego i wartości zespolonych**

W ogólności metody interpolacji widma mogą wykorzystywać pełną informację zawartą w wartościach zespolonych widma  $X_k$  lub tylko wartości modułu widma  $|X_k|$ . Przewagą metod wykorzystujących wartości zespolone jest to, że nie występuje w nich problem określenia kierunku interpolacji. Rodzaj używanych wartości widma w interpolacji reprezentowany jest przez cechę #10 w tabeli 3.1.

### **Wykorzystane okno czasowe**

Nałożenie okna czasowego na sygnał skutkuje zmianą kształtu jego widma (rozdział 3.2.4). Dlatego rodzaj zastosowanego okna czasowego bezpośrednio wpływa na postać uzyskiwanej formuły interpolacyjnej. Jeśli wykorzystywane jest przybliżenie określające kształt widma, to sposób doboru parametrów metody ma bezpośredni wpływ na dokładność estymacji. Rodzaj wykorzystywanego okna czasowego jest określona przez cechę #11 w tabeli 3.1.

### **Metody wykorzystujące wartości widma ciągłego DtFT**

Tak jak zostało to już opisane przy okazji metod iteracyjnych (rozdział 3.8.3), obliczanie dodatkowych wartości widma DtFT o niecałkowitej częstotliwości  $\lambda$  może skutkować w poprawie dokładności estymacji. Wiąże się to jednak ze wzrostem złożoności obliczeniowej metody ze względu na konieczność obliczenia wartości z widma ciągłego  $X(\lambda)$ . Metody wykorzystujące wartości z widma ciągłego DtFT oznaczone są z użyciem cechy #12 opisaną w tabeli 3.1.

### 3.8.5 Nowe metody interpolacji widma wykorzystujące okna GMSD

Nowe metody interpolacji widma zaproponowane w niniejszej rozprawie wykorzystują wartości zespolone widma i zostały wyprowadzone dla okien czasowych GMSD. Właściwości tych metod zostały zestawione w tabeli 3.4, a same metody stanowią główny temat rozważań pozostałej części pracy. Składają się na nie: metoda dwupunktowa (2pGMSD), która przyjmuje w modelu pojedynczą oscylacją zespoloną; metoda trzypunktowa (3pGMSD) [37], która wykorzystuje bezpośrednią eliminację wpływu składowej sprzężonej w formule interpolacyjnej oraz metoda pięciopunktowa (5pGMSD) [123], która dodatkowo wykorzystuje bezpośrednią eliminację wpływu najbliższej rzeczywistej składowej harmonicznej w formule interpolacyjnej. Wprowadzone estymatory są metodami z jednokrokową formułą interpolacyjną. Należy jednak mieć na uwadze, że mogą służyć jako podstawowy algorytm dla dużej części technik wykorzystywanych w metodach wieloetapowych lub iteracyjnych, które były omawiane w niniejszym rozdziale.

Tabela 3.1. Opis cech porównywanych metod ze względu na użyty w interpolacji model sygnału, strukturę algorytmu oraz postać widma sygnału. Do każdej z omawianych cech przydzielony jest numer, który dalej jest wykorzystany do identyfikacji cechy w zestawieniach przedstawionych w tabelach (3.2, 3.3 i 3.4).

Porównanie cech omawianych w rozdziale trzecim	
<i>Model sygnału:</i>	
#1	Bezpośrednie uwzględnienie wpływu <b>składowej podstawowej</b> w formule interpolacyjnej
#2	Bezpośrednie uwzględnienie <b>składowej sprzężonej</b> w formule interpolacyjnej
#3	Bezpośrednie uwzględnienie <b>składowej stałej</b> w formule interpolacyjnej
#4	Bezpośrednie uwzględnienie <b>rzeczywistej składowej harmonicznej</b> w formule interpolacyjnej
#5	Pośrednie <i>nieiteracyjne</i> uwzględnienie innych składowych częstotliwościowych sygnału: aproksymacja wpływu <i>long-range leakage</i> za pomocą modelowania stałą, wielomianem lub w inny sposób
#6	Usunięcie w sposób <i>iteracyjny</i> wpływu innych składowych częstotliwościowych sygnału (w dziedzinie czasu lub częstotliwości) <b>lub</b> kompensacja tego wpływu w kolejnych etapach estymacji (zastosowanie poprawki, dobór parametrów)
<i>Struktura algorytmu:</i>	
#7	Liczba wykorzystanych wartości DFT/DtFT
#8	Czy jest metodą iteracyjną?
#9	Czy jest metodą wieloetapową?
<i>Postać widma:</i>	
#10	Metoda wykorzystuje wartości modułu widma ( $ X_k $ ) czy wartości zespolone $X_k$ ?
#11	Wykorzystane okna czasowe
#12	Czy metoda wykorzystuje wartości DtFT?

Tabela 3.2. Zestawienie własności wybranych metod omawianych w rozdziale trzecim.

<i>Klasyczne metody IpDFT</i>												
	model sygnału						struktura			postać widma		
<i>Metoda</i>	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12
Renders[148]	✓	✗	✗	✗	✗	✗	2	✗	✗	$X_k$	Prost.	✗
Bertocco[32]	✓	✗	✗	✗	✗	✗	2	✗	✗	$X_k$	Prost.	✗
Rife[149]	✓	✗	✗	✗	✗	✗	2	✗	✗	$ X_k $	MSD	✗
Yang[179]	✓	✗	✗	✗	✗	✗	2	✗	✗	$X_k$	MSD	✗
Quinn[144]	✓	✗	✗	✗	✗	✗	2	✗	✗	$X_k$	Prost.	✗
Liao[115]	✓	✗	✗	✗	✗	✗	2	✗	✓	$X_k$	Prost.	✗
Agreż[5]	✓	✗	✗	✗	✓	✗	3	✗	✗	$ X_k $	Prost.	✗
Belega[12]	✓	✗	✗	✗	✓	✗	3	✗	✗	$ X_k $	MSD	✗
Duda[79]	✓	✗	✗	✗	✓	✗	3	✗	✗	$ X_k $	GMSD	✗
<i>Iteracyjne dwupunktowe metody IpDFT z obliczaniem DtFT</i>												
	model sygnału						struktura			postać widma		
<i>Metoda</i>	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12
Aboutanios[3]	✓	✗	✗	✗	✗	✗	2	✓	✗	$ X_k $	Prost.	✓
Serbes[158]	✓	✗	✗	✗	✗	✗	2	✓	✗	$ X_k $	Prost.	✓
Liao[114]	✓	✗	✗	✗	✗	✗	2	✓	✗	$ X_k $	Prost.	✓
Belega[24]	✓	✗	✗	✗	✗	✗	2	✓	✗	$ X_k $	MSD	✓
<i>Iteracyjne trzypunktowe metody IpDFT z obliczaniem DtFT</i>												
	model sygnału						struktura			postać widma		
<i>Metoda</i>	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12
Fan[81]	✓	✗	✗	✗	✗	✗	3	✓	✗	$ X_k $	Prost.	✓
Wei[172]	✓	✗	✗	✗	✗	✗	3	✓	✗	$ X_k $	Prost.	✓
<i>Inne estymatory trzypunktowe dla pojedynczej oscylacji zespolonej</i>												
	model sygnału						struktura			postać widma		
<i>Metoda</i>	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12
Jacobsen[93]	✓	✗	✗	✗	✗	✗	3	✗	✗	$X_k$	Prost.	✗
Candan[58]	✓	✗	✗	✗	✗	✗	3	✗	✗	$X_k$	Prost.	✗
Candan[60]	✓	✗	✗	✗	✗	✗	3	✗	✓	$X_k$	każde*	✗
Liang[113]	✓	✗	✗	✗	✗	✗	3	✗	✗	$X_k$	Prost.	✗
Wen[173]	✓	✗	✗	✗	✗	✗	3	✗	✗	$X_k$	MSD	✗
Chen[65]	✓	✗	✗	✗	✓	✗	L+3	✗	✗	$X_k$	MSD	✗
<i>Klasa metod z bezpoś. el. składowej sprzężonej</i>												
	model sygnału						struktura			postać widma		
<i>Metoda</i>	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12
Chen[64]	✓	✓	✗	✗	✓	✗	3	✗	✗	$X_k$	Hann	✗
Borkowski[36]	✓	✓	✗	✗	✓	✗	3	✗	✗	$X_k$	MSD	✗
Wang[171]	✓	✓	✓	✗	✓	✗	4	✗	✗	$X_k$	MSD	✗
Borkowski[37]	✓	✓	✗	✗	✓	✗	3	✗	✗	$X_k$	GMSD	✗
Matusiak[123]	✓	✓	✗	✓	✓	✗	5	✗	✗	$X_k$	GMSD	✗
Wang[170]	✓	✓	✗	✗	✓	✗	3	✗	✗	$X_k$	Prost.	✗

Tabela 3.3. Zestawienie własności wybranych metod omawianych w rozdziale trzecim.

<i>Metody z iteracyjnym usuwaniem wpływu składowej sprzężonej</i>												
	<b>model sygnału</b>						<b>struktura</b>			<b>postać widma</b>		
<i>Metoda</i>	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12
Romano[151]	✓	✗	✗	✗	✗	✗	3	✓	✗	$ X_k $	Prost.	✓
Ye[181]	✓	✗	✗	✗	✗	✗	2	✓	✗	$ X_k $	Prost.	✓
<i>Metody z iteracyjnym usuwaniem wpływu składowych harmonicznyc</i>												
	<b>model sygnału</b>						<b>struktura</b>			<b>postać widma</b>		
<i>Metoda</i>	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12
Belega[23]	✓	✗	✗	✗	✗	✗	3	✓	✗	$ X_k $	Prost.	✓
Derviškadic[72]	✓	✗	✗	✗	✗	✗	2	✓	✗	$ X_k $	Prost.	✓

Tabela 3.4. Zestawienie własności metod interpolacji widma zaproponowanych przez autora niniejszej rozprawy.

<b>Metody IpDFT dla okien GMSD zaproponowane w niniejszej rozprawie</b>												
	<b>model sygnału</b>						<b>struktura</b>			<b>postać widma</b>		
<i>Metoda</i>	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12
2pGMSD	✓	✓	✗	✓	✓	✗	5	✗	✗	$X_k$	GMSD	✗
3pGMSD [37]	✓	✓	✗	✓	✓	✗	5	✗	✗	$X_k$	GMSD	✓
5pGMSD[123]	✓	✓	✗	✓	✓	✗	5	✗	✗	$X_k$	GMSD	✗

## Rozdział 4

# Nowa rodzina metod IpDFT dla okien czasowych GMSD

### 4.1 Wprowadzenie do rozdziału

Analiza dotycząca dostępnych metod interpolowanej DFT przeprowadzona w rozdziale 3 pokazała, że obecnie wykorzystywane techniki ograniczania wpływu na estymację obecności składowych zakłócających najczęściej zakładają kompensację pośrednią, np. z użyciem technik iteracyjnych. W przypadku zastosowania tych metod skrócenie czasu trwania okna pomiarowego powoduje zmniejszenie dokładności estymacji, co jest związane z rosnącym wpływem przecieku widma pochodzącym od bliskich składowych częstotliwościowych, zwłaszcza składowej sprzężonej i bliskich składowych harmonicznym. Jak zostało pokazane w niniejszym rozdziale, funkcja aproksymująca charakterystykę częstotliwościową okien GMSD [37] pozwala na uzyskanie nowych metod IpDFT, które charakteryzują się znaczącą redukcją wpływu przecieku widma pochodzącego od bliskich składowych, bezpośrednio w formule interpolacyjnej.

Końcowym rezultatem przeprowadzonych badań nad metodami interpolacji widma jest autorska procedura uzyskiwania algebraicznych wyrażeń estymatorów częstotliwości wykorzystujących okna GMSD. Uzyskiwane w ten sposób formuły interpolacyjne uwzględniają wpływ przecieku widma pochodzącego od innych składowych występujących w widmie. W niniejszym rozdziale zostały przedstawione zależności, wraz z pełnym wyprowadzeniem, dla trzech metod: dwupunktowej, trzypunktowej[37] (wraz z jej uogólnioną postacią) oraz pięciopunktowej[123]. Prezentowane estymatory zakładają redukcję wpływu na estymację kolejnych składowych częstotliwościowych, odpowiednio: jednej, dwóch lub czterech oscylacji zespolonych. Wszystkie z wymienionych metod zostały przedstawione w uogólnionej i sparametryzowanej formie, która umożliwia otrzymanie wyrażenia uwzględniającego wpływ wybranych zespolonych oscylacji harmonicznym (z częstotliwością stanowiącą całkowitą wielokrotność częstotliwości podstawowej  $\lambda_0$ ). Dla metody dwupunktowej możliwy jest wybór krotności jednej *zespolonej* oscylacji harmonicznym, dla metody trzypunktowej dwóch oscylacji *zespolonych* oraz krotności dwóch dowolnie wybranych *rzeczywistych* oscylacji harmonicznym dla przypadku metody pięciopunktowej. W praktyce oznacza to m.in. możliwość wyeliminowania wpływu wybranej rzeczywistej składowej harmonicznym niskiego rzędu w pomiarze częstotliwości sygnału sinusoidalnego z wykorzystaniem metody pięciopunktowej. Wszystkie z wymienionych metod są metodami z bezpośrednią eliminacją wpływu składowych zakłócających, a więc oferują jednokrokovą formułę algebraiczną służącą estymacji częstotliwości unormowanej

$\lambda_0$ . W przypadku metody trypunktowej, bezpośrednia eliminacja wpływu bliskich składowych częstotliwościowych funkcjonuje równoległe do eliminacji wpływu składowych oddalonych wynikającej z zastosowania okien GMSD[37].

## 4.2 Widmo okien czasowych GMSD

Dla zachowania kompletności wywodu, poniżej zostały ponownie przedstawione zależności związane z oknami czasowymi GMSD, które stanowią punkt wyjścia dla wyprowadzenia uzyskiwanych metod. Dyskretna funkcja definiująca postać czasową okien GMSD przyjmuje w ogólności postać:

$$w(n) = \sin^p \left( \frac{\pi n}{N} \right) \quad (4.1)$$

dla okna pomiarowego o długości  $N$ , gdzie indeks  $n = 0, \dots, N - 1$ , a parametr okna  $p$  jest nieujemną liczbą całkowitą. Okna czasowe tej rodziny są uogólnioną postacią okien MSD (tj. okien I klasy Rife'a-Vincenta)[37]. Zależność (4.1) może zostać wykorzystana do definicji postaci czasowej okien MSD dla parzystych wartości parametru okna  $p$ . Okna GMSD zachowują własność maksymalnego tempa opadania listków bocznych charakterystyczną dla okien MSD[37].

Podstawową zależnością wykorzystywaną w wyprowadzeniu równań uzyskiwanych metod jest ciągła funkcja aproksymująca charakterystykę częstotliwościową okna czasowego (4.1)[37]:

$$W_p(\lambda) = \frac{\frac{N \cdot p!}{\pi \cdot 2^p} e^{-j\pi\lambda} \sin \left( \pi\lambda + z \frac{\pi}{2} \right)}{(-1)^{r+z} \prod_{h=-(r+z)}^r \left( \lambda + h + \frac{z}{2} \right)} \quad (4.2)$$

gdzie parametry  $z$  oraz  $r$  są definiowane z użyciem parametru okna  $p$  jako  $p = 2r + z$  oraz  $r = \lfloor p/2 \rfloor$ , tj.  $r$  jest wartością całkowitą, będącą ilorazem dzielenia  $p$  przez dwa, z kolei  $z$  stanowi resztę tego dzielenia.

Estymatory sygnału wieloczęstotliwościowego występujące w metodach interpolacji widma w ogólności wykorzystują dwie informacje: o wartościach prążków DFT oraz z zależności określającej relację pomiędzy nimi, tj. o *kształcie* widma, który wynika z przyjętego modelu sygnału. W przypadku okien GMSD widmo można aproksymować poprzez sumę przesuniętych na osi częstotliwości i przeskalowanych funkcji (4.2), dla których każda reprezentuje widmo pojedynczej oscylacji zespolonej, a uzyskane w pomiarze wartości DFT wyznaczają zbiór dyskretnych wartości rozłożonych równomiernie w ciągłym widmie. Wskazane wyrażenie stanowi punkt wyjścia dla wyprowadzenia metod interpolacji, gdyż pozwala na ustalenie relacji zachodzącej pomiędzy kolejnymi wartościami DFT widma i ostatecznie prowadzi do uzyskania formuły interpolacyjnej. Ogólne wyrażenie wiążące dwie dowolne wartości DFT z widma okna GMSD (4.2) jest wyrażone w następujący sposób [37]:

$$W_p(\lambda + n) = W_p(\lambda) \prod_{m=1}^n \frac{2(\lambda + m - 1) - p}{2(\lambda + m) + p} \quad (4.3)$$

gdzie dla dowolnej częstotliwości unormowanej widma  $\lambda$  można ustalić związek pomiędzy wartością  $W_p(\lambda)$  i oddaloną od niej o  $n$  wartością widma  $W_p(\lambda + n)$ , a  $n$  jest wartością całkowitą ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Licznik i mianownik powyższego wyrażenia stanowią wielomiany

zmiennej  $\lambda$  przyjmujące stopień zależny od odległości  $n$  pomiędzy dwoma rozpatrywanymi prążkami. Stąd przemnożenie obu stron równania (4.3) przez wielomian występujący w mianowniku prowadzi do uzyskania równania wielomianowego stopnia  $n$ . Zestawienie tej relacji z modelem sygnału wieloczęstotliwościowego (3.3) pozwala na uzyskanie wyrażenia wiążącego wartości sąsiadujących prążków widma  $X(k)$ . Jeśli jest możliwe rozwiązanie tak uzyskanego równania ze względu na wartość  $\lambda_0$ , to uzyskana relacja prowadzi do formuły interpolacyjnej. Wraz ze wzrostem wartości parametru  $n$  w (4.3) uzyskiwane równanie bardzo się komplikuje. Dlatego dla uproszczenia zapisu uzyskanej relacji zachodzącej pomiędzy prążkami DFT, używane są współczynniki różnic skończonych definiowane w sposób rekurencyjny:

$$\begin{aligned}\Delta^0 X_k &= X_k \\ \Delta^1 X_k &= X_{k+1} - X_k \\ &\dots \\ \Delta^n X_k &= \Delta^{n-1} X_{k+1} - \Delta^{n-1} X_k\end{aligned}\tag{4.4}$$

gdzie wartość  $n$  oznacza rząd współczynnika. Liczba prążków DFT, których wartości są używane do obliczenia współczynnika  $\Delta^n X_k$  wynosi  $n + 1$ . Dla metody dwupunktowej wykorzystywane są zatem współczynniki maksymalnego rzędu  $n = 1$  (współczynnik  $\Delta^1 X_k$ ), dla metody trzypunktowej  $n = 2$  (współczynnik  $\Delta^2 X_k$ ) oraz dla metody pięciopunktowej  $n = 4$  (współczynnik  $\Delta^4 X_k$ ).

Wyprowadzenia przedstawione w niniejszym rozdziale wykorzystują analizę przypadku pojedynczej oscylacji zespolonej jako bazę do uzyskania kolejnych relacji opisujących pełny model (3.3). Przyjęte podejście ma na celu uproszczenie wyprowadzeń. Ostatecznie uzyskanie końcowych formuł interpolacyjnych jest możliwe dzięki wykorzystaniu własności liniowości przekształcenia DFT.

### 4.3 Widmo pojedynczej oscylacji zespolonej dla okien GMSD i dwupunktowa formuła IpDFT

W rozdziale 3 wykorzystanie wzoru Eulera do rozwinięcia modelu sygnału wieloczęstotliwościowego (3.1) pozwoliło na jego przedstawienie w postaci sumy oscylacji zespolonych w równaniach (3.2) oraz (3.3). W dalszej części wywodu wybrana została pojedyncza oscylacja oznaczona indeksem  $l = a$  z modelu (3.3), której częstotliwość  $\lambda_a = a\lambda_0$  stanowi całkowitą wielokrotność częstotliwości podstawowej  $\lambda_0$ :

$$x_a(n) = B_a e^{j2\pi a\lambda_0 \frac{n}{N}}\tag{4.5}$$

dla której  $B_a$  oznacza amplitudę zespoloną oscylacji.

Wykorzystanie przekształcenia DFT (3.4), po nałożeniu okna czasowego  $w(n)$  na sygnał  $x_a(n)$ , pozwala na otrzymanie wartości dyskretnego widma  $X_k^{(a\lambda_0)}$ :

$$X_k^{(a\lambda_0)} = \sum_{n=0}^{N-1} w(n)x_a(n)e^{-j2\pi k \frac{n}{N}}\tag{4.6}$$

Równania (4.5) i (4.6) prowadzą do następującej zależności opisującej widmo cząstkowe  $X_k^{(a\lambda_0)}$  związane z pojedynczą oscylacją  $a$ :

$$X_k^{(a\lambda_0)} = B_a W_p(k - a\lambda_0)\tag{4.7}$$

Górny indeks zastosowany w symbolu  $X_k^{(a\lambda_0)}$  ma na celu podkreślenie faktu, że  $X_k^{(a\lambda_0)}$  jest składową widmową modelu (3.10), związaną z sygnałem  $x_a(n)$ . Przyjęta konwencja jest dalej konsekwentnie stosowana w niniejszym rozdziale.

Tak jak podkreślano wcześniej, formuły interpolacyjne wprowadzanej rodziny metod opierają się na analizie relacji pomiędzy wartościami sąsiadujących ze sobą prążków widma. Najprostszym wyrażeniem tego rodzaju jest takie, które uwzględnia dwie kolejne wartości prążków pochodzących z dyskretnego widma  $X_k^{(a\lambda_0)}$ . W celu uzyskania takiej zależności można obliczyć wartość współczynnika różnicy skończonej rzędu pierwszego, zgodnie z definicją (4.4). Po uwzględnieniu wyrażenia (4.7) otrzymano:

$$\Delta^1 X_k^{(a\lambda_0)} = X_{k+1}^{(a\lambda_0)} - X_k^{(a\lambda_0)} = B_a [W_p(k+1-a\lambda_0) - W_p(k-a\lambda_0)] \quad (4.8)$$

W powyższym równaniu nie są znane dwa parametry sygnału  $x_a(n)$ , tj. amplituda zespolona  $B_a$  i częstotliwość podstawowa  $\lambda_0$ . Celem opisywanego wyprowadzenia jest znalezienie wartości częstotliwości  $\lambda_0$ , dlatego należy wyeliminować parametr  $B_a$  z równania. W tym celu można wykorzystać relację (4.3), dzięki której możliwe jest rozwinięcie wartości  $W_p(k+1-a\lambda_0)$  we wcześniejszym równaniu:

$$\Delta^1 X_k^{(a\lambda_0)} = B_a W_p(k-a\lambda_0) \left[ \frac{k-2a\lambda_0-p}{2(k-a\lambda_0+1)+p} - 1 \right] = X_k^{(a\lambda_0)} \left[ \frac{k-2a\lambda_0-p}{2(k-a\lambda_0+1)+p} - 1 \right] \quad (4.9)$$

W powyższym równaniu parametr amplitudy zespolonej  $B_a$  został *zwinięty* do postaci  $X_k^{(a\lambda_0)}$  przez bezpośrednie wykorzystanie definicji (4.7). W celu uproszczenia zależności należy uzyskany ułamek podzielić przez 2 i dalej sprowadzić do wspólnego mianownika z ułamkiem otrzymanym przez rozwinięcie wartości  $-1$ :

$$\Delta^1 X_k^{(a\lambda_0)} = X_k^{(a\lambda_0)} \left[ \frac{k-a\lambda_0-\frac{p}{2}}{(k-a\lambda_0+1)+\frac{p}{2}} - \frac{(k-a\lambda_0+1)+\frac{p}{2}}{(k-a\lambda_0+1)+\frac{p}{2}} \right] = X_k^{(a\lambda_0)} \frac{-(p+1)}{(k-a\lambda_0+1)+\frac{p}{2}} \quad (4.10)$$

Ostatecznie wyrażenie opisujące relację pomiędzy dwoma sąsiadującymi ze sobą prążkami  $X_k^{(a\lambda_0)}$  i  $X_{k+1}^{(a\lambda_0)}$  przybiera postać:

$$(p+1)X_{k+1}^{(a\lambda_0)} = \Delta^1 X_k^{(a\lambda_0)} \left( a\lambda_0 - k - 1 - \frac{p}{2} \right) \quad (4.11)$$

Jeśli model sygnału składa się wyłącznie z jednej oscylacji zespolonej, to jedyną niewiadomą w powyższym równaniu jest wartość częstotliwości unormowanej  $\lambda_0$ . Tę samą procedurę można zastosować do wyprowadzenia zależności zawierającą wartości  $\Delta^1 X_k^{(a\lambda_0)}$  oraz  $X_k^{(a\lambda_0)}$  (przez rozwinięcie wartości  $W_p(k-a\lambda_0)$  zamiast  $W_p(k+1\lambda_0)$  w równaniu (4.8)). Alternatywna wersja równania (4.11) jest wówczas dana jako:

$$(p+1)X_{k+1}^{(a\lambda_0)} = \Delta^1 X_k^{(a\lambda_0)} \left( a\lambda_0 - k + \frac{p}{2} \right) \quad (4.12)$$

Równania (4.11) oraz (4.12) prowadzą do otrzymania formuły interpolacyjnej dla przypadku pojedynczej zespolonej oscylacji harmonicznej obecnej w modelu sygnału. Zakładając, że częstotliwość podstawowa  $\lambda_0$  w modelu sygnału (3.3) odpowiada częstotliwości rozważanej oscylacji, to parametr  $a$  będący krotnością harmonicznej musi przyjąć wartość  $a = 1$ . Kolejnym krokiem jest ustalenie relacji pomiędzy składową widmową  $X_k^{(a\lambda_0)}$  a widmem badanego sygnału. Dla pojedynczej oscylacji zespolonej widmo sygnału z modelu (3.10) przyjmuje postać:

$$X_k = X_k^{(a\lambda_0)} \quad (4.13)$$



co prowadzi do uproszczenia równań (4.11) oraz (4.12) przez zastąpienie symboli składowych cząstkowych  $X_k^{(a\lambda_0)}$  znanymi wartościami  $X_k$ . Po prostych przekształceniach algebraicznych otrzymane zostały formuły interpolacyjne dla przypadku estymacji częstotliwości unormowanej  $\lambda_0$ . Pierwsza formuła interpolacyjna przybiera postać:

$$\lambda_0 - k = \varepsilon = \frac{(p+1)X_k}{\Delta^1 X_k} + \left(1 + \frac{p}{2}\right) \quad (4.14)$$

co wynika z podstawienia do (4.11) modelu (4.13). Druga formuła przedstawia się jako:

$$\lambda_0 - k = \varepsilon = \frac{(p+1)X_{k+1}}{\Delta^1 X_k} - \frac{p}{2} \quad (4.15)$$

która jest otrzymana z podstawienia do (4.12) modelu (4.13).

W rozdziałach 3 i 5 pokazano, że estymator, który zakłada model pojedynczej oscylacji zespolonej może być użyteczny dla dłuższych czasów pomiarów. W przypadku rozważanego estymatora dwupunktowego jest to sytuacja, gdy można pominąć wpływ innych składowych częstotliwościowych na wartości zespolonych prążków  $X_k$  i  $X_{k+1}$  (podstawienie w modelu (4.13)). W przypadku obu estymatorów (4.14) oraz (4.15) dobór odpowiedniej wartości parametru okna  $p$  pozwala na dodatkową eliminację wpływu przecieku widma pochodzącego od składowych oddalonych.

## 4.4 Widmo sygnału sinusoidalnego dla okien GMSD i trzypunktowa formuła IpDFT

Próbki sygnału uzyskiwane w praktycznym systemie przyjmują wartości rzeczywiste, dlatego składowej podstawowej w widmie musi towarzyszyć komponent sprzężony (rozdział 3.6). W takim przypadku wykorzystanie metod zakładających w modelu pojedynczą oscylację zespoloną skutkuje znacznym spadkiem dokładności estymacji, gdy czas pomiaru jest krótki. Alternatywnie zastosowanie metod z rozszerzonym modelem sygnału, tak aby został uwzględniony wpływ składowej sprzężonej, umożliwia bardzo znaczącą redukcję omawianego błędu. Zależność aproksymująca widmo (4.2) pozwala na uzyskanie metody tego rodzaju, wykorzystującej bezpośrednią formułę interpolacyjną z trzema kolejnymi prążkami DFT:  $X_{k-1}$ ,  $X_k$ ,  $X_{k+1}$ . Użycie trzech wartości DFT pozwala na wygenerowanie wielomianu drugiego stopnia, który następnie może służyć do zbudowania układu równań zawierających zależności opisujące dwie zespolone oscylacje. Podobnie jak to było w przypadku wyprowadzenia formuły dwupunktowej, początkowe wyrażenia są uzyskiwane dla pojedynczej oscylacji zespolonej o częstotliwości  $a\lambda_0$  (4.5).

Współczynnik różnicy skończonej dla trzech sąsiadujących ze sobą prążków DFT  $\Delta^2 X_{k-1}^{(a\lambda_0)}$ , zdefiniowany zgodnie z (4.4), po rozwinięciu przedstawia się następująco:

$$\Delta^2 X_{k-1}^{(a\lambda_0)} = \Delta^1 X_k^{(a\lambda_0)} - \Delta^1 X_{k-1}^{(a\lambda_0)} = X_{k+1}^{(a\lambda_0)} - 2X_k^{(a\lambda_0)} + X_{k-1}^{(a\lambda_0)} \quad (4.16)$$

Powyższe wyrażenie stanowi punkt wyjściowy do otrzymania zależności wiążącej współczynnik różnicy skończonej drugiego rzędu  $\Delta^2 X_{k-1}^{(a\lambda_0)}$  z kwadratem wartości częstotliwości podstawowej  $\lambda_0^2$ . Równanie kwadratowe tej postaci daje możliwość uwzględnienia dwóch składowych o niezależnych wartościach częstotliwości harmonicznych, co zostanie wykazane dalej w tej sekcji. Równanie (4.16) można rozwinąć do postaci wyrażonej przy pomocy częstotliwości podstawowej  $\lambda_0$ , przez wykorzystanie równań opisujących relację

pomiędzy dwoma kolejnymi prążkami DFT, uzyskaną wcześniej dla przypadku estymatora dwupunktowego (4.11) i (4.12). W pierwszej kolejności współczynnik  $\Delta^1 X_k^{(a\lambda_0)}$  może zostać wyrażony za pomocą (4.11) i dalej wyrażenie  $\Delta^1 X_{k-1}^{(a\lambda_0)}$  za pomocą (4.12) (przez odpowiednie zastąpienie indeksu  $k$  na  $k - 1$ ):

$$\Delta^2 X_{k-1}^{(a\lambda_0)} = \Delta^1 X_k^{(a\lambda_0)} - \Delta^1 X_{k-1}^{(a\lambda_0)} = \frac{(p+1)X_k^{(a\lambda_0)}}{a\lambda_0 - k - 1 - \frac{p}{2}} - \frac{(p+1)X_k^{(a\lambda_0)}}{a\lambda_0 - k + 1 + \frac{p}{2}} \quad (4.17)$$

W przypadku powyższego wyrażenia należy zauważyć, że znalezienie wspólnego mianownika skutkuje otrzymaniem wyrażenia typu  $(a+b) \cdot (a-b)$ . Po przemnożeniu obu stron równania przez wspólny mianownik, wyrażenie przyjmuje postać wiążącą trzy kolejne prążki widma DFT i zawiera kwadrat częstotliwości unormowanej  $\lambda_0^2$ :

$$(p+1)(p+2)X_k^{(a\lambda_0)} = \Delta^2 X_{k-1}^{(a\lambda_0)} \left[ (a\lambda_0 - k)^2 - \left(1 + \frac{p}{2}\right)^2 \right] \quad (4.18)$$

Powyższe wyrażenie stanowi odpowiednik równania (4.12) dla przypadku trzech prążków widma DFT. Postępując w analogiczny sposób można powtórzyć proces wyprowadzenia zależności dwupunktowej. Przepisanie wyrażenia (4.18) w taki sposób, aby wyodrębnić jednomian  $a^2 \lambda_0^2$  do lewej strony równania, prowadzi do otrzymania postaci ogólnej funkcji kwadratowej ze względu na zmienną  $\lambda_0$ :

$$a^2 \lambda_0^2 \Delta^2 X_{k-1}^{(a\lambda_0)} - a\lambda_0 k \Delta^2 X_{k-1}^{(a\lambda_0)} + k^2 \Delta^2 X_{k-1}^{(a\lambda_0)} - \left(1 + \frac{p}{2}\right)^2 \Delta^2 X_{k-1}^{(a\lambda_0)} - (p+1)(p+2)X_k^{(a\lambda_0)} = 0 \quad (4.19)$$

Tak jak wspomniano wcześniej, na potrzeby dalszej części wyprowadzenia potrzebne jest wyrażenie, które wiąże jednomian zawierający  $\lambda_0^2$ , wyrażony wartościami prążków  $X_k^{(a\lambda_0)}$  i znanych parametrów  $k, p$  i  $a$ . Dlatego też należy wyeliminować jednomian  $a\lambda_0 k \Delta^2 X_{k-1}^{(a\lambda_0)}$  z równania (4.19). W celu uzyskania zależności definiującej usuwany jednomian należy wykorzystać wyrażenie (4.3), najpierw do wygenerowania pośredniej zależności wiążącej prążki  $X_k$  i  $X_{k-1}$ , a następnie analogicznej, wiążącej prążki  $X_k$  i  $X_{k+1}$ :

$$(-a\lambda_0 + k + 1 + \frac{p}{2})X_{k+1}^{(a\lambda_0)} = (-a\lambda_0 + k - \frac{p}{2})X_k^{(a\lambda_0)} \quad (4.20)$$

$$(-a\lambda_0 + k - 1 - \frac{p}{2})X_{k-1}^{(a\lambda_0)} = (-a\lambda_0 + k + \frac{p}{2})X_k^{(a\lambda_0)} \quad (4.21)$$

Wyrażenia (4.20) i (4.21), po dodaniu stronami, prowadzą do uzyskania wyrażenia definiującego jednomian  $a\lambda_0 \Delta^2 X_{k-1}^{(a\lambda_0)}$ :

$$\Delta^2 X_{k-1}^{(a\lambda_0)} (a\lambda_0 - k) = \frac{1}{2}(p+2) [X_{k+1}^{(a\lambda_0)} - X_{k-1}^{(a\lambda_0)}] \quad (4.22)$$

co za tym idzie, powyższe wyrażenie pozwala na eliminację tego jednomianu z równania (4.19). Po odpowiednim uporządkowaniu obu stron równania otrzymano wyrażenie definiujące jednomian  $a^2 \lambda_0^2 \Delta^2 X_{k-1}^{(a\lambda_0)}$ , które składa się wyłącznie ze znanych parametrów:

$$a^2 \lambda_0^2 \Delta^2 X_{k-1}^{(a\lambda_0)} = k^2 \Delta^2 X_{k-1}^{(a\lambda_0)} + k(p+2)[X_{k+1}^{(a\lambda_0)} - X_{k-1}^{(a\lambda_0)}] + \frac{1}{4}(p+2)[(p+2)X_{k+1}^{(a\lambda_0)} + 2pX_k^{(a\lambda_0)} + (p+2)X_{k-1}^{(a\lambda_0)}] \quad (4.23)$$

Dalsza część wyprowadzenia dotyczy uzyskania trzypunktowej formuły interpolacyjnej do estymacji częstotliwości podstawowej  $\lambda_0$  dwóch niezależnych oscylacji zespolonych. W celu zachowania czytelności wywodu zostały wprowadzone symbole  $C_{\lambda_0^2}^{(a)}$ ,  $C_{\lambda_0^1}^{(a)}$  i  $C_0^{(a)}$ , które pozwalają na skrócenie zapisu uzyskanych złożonych równań. Współczynnik  $C_{\lambda_0^2}^{(a)}$  definiowany jest za pomocą następującego jednomianu:

$$C_{\lambda_0^1}^{(a)} = a\lambda_0\Delta^2 X_{k-1}^{(a\lambda_0)} \quad (4.24)$$

i pozwala na zapis wyrażenia (4.22) w następujący sposób:

$$C_{\lambda_0^1}^{(a)} = k\Delta^2 X_{k-1}^{(a\lambda_0)} + \frac{1}{2}(p+2) [X_{k+1}^{(a\lambda_0)} - X_{k-1}^{(a\lambda_0)}] \quad (4.25)$$

Z kolei współczynnik  $C_{\lambda_0^2}^{(a)}$  definiowany jest jako:

$$C_{\lambda_0^2}^{(a)} = a^2\lambda_0^2\Delta^2 X_{k-1}^{(a\lambda_0)} \quad (4.26)$$

i pozwala na zapis wyrażenia (4.23) w następujący sposób:

$$\begin{aligned} C_{\lambda_0^2}^{(a)} = & k^2\Delta^2 X_{k-1}^{(a\lambda_0)} + k(p+2)[X_{k+1}^{(a\lambda_0)} - X_{k-1}^{(a\lambda_0)}] \\ & + \frac{1}{4}(p+2)[(p+2)X_{k+1}^{(a\lambda_0)} + 2pX_k^{(a\lambda_0)} + (p+2)X_{k-1}^{(a\lambda_0)}] \end{aligned} \quad (4.27)$$

Ostatni z wprowadzanych współczynników  $C_0^{(a)}$  jest zdefiniowany jako:

$$C_0^{(a)} = \Delta^2 X_{k-1}^{(a\lambda_0)} \quad (4.28)$$

i stanowi odpowiednik stopnia zerowego symboli  $C_{\lambda_0^2}^{(a)}$  i  $C_{\lambda_0^1}^{(a)}$ . Został on wprowadzony dla ujednoczenia wyrażeń w zestawianych dalej układach równań.

Równania (4.25), (4.27) i (4.28) zostały wykorzystane w proponowanej procedurze, ponieważ pozwalają na uwzględnienie w estymacji dwóch zespolonych sygnałów harmonicznym. Wynika to z tego, że za ich pomocą uzyskiwany jest wielomian stopnia drugiego zmiennej  $\lambda_0$ . Analogicznie jak dla przypadku metody dwupunktowej, tak i dla metody trzypunktowej należy wybrać model sygnału, dla którego zostanie uzyskana formuła interpolacyjna. Przy założeniu dwóch stałych wartości częstotliwości, dla dwóch oscylacji zespolonych, tj.  $\lambda_1 = a\lambda_0$  oraz  $\lambda_2 = b\lambda_0$ , wartości prążków widma DFT takiego modelu można wyrazić jako:

$$X_k = X_k^{(a\lambda_0)} + X_k^{(b\lambda_0)} \quad (4.29)$$

Powyższe równanie pozwala na sprowadzenie wyrażeń cząstkowych reprezentowanych za pomocą symboli  $C_{\lambda_0^2}^{(h)}$ ,  $C_{\lambda_0^1}^{(h)}$  i  $C_0^{(h)}$  do postaci, która zawiera tylko faktycznie mierzone wartości widma  $X_k$ . Jest to możliwe ze względu na to, że wartości cząstkowe  $X_k^{(a\lambda_0)}$  i  $X_k^{(b\lambda_0)}$  w równaniach (4.25) i (4.27) powiązane są ze zmienną  $\lambda_0$  wyłącznie za pomocą zależności liniowych. Przez wprowadzenie nowych definicji współczynników  $C_x$ :

$$C_{\lambda_0^1} = C_{\lambda_0^1}^{(a)} + C_{\lambda_0^1}^{(b)} \quad \wedge \quad C_{\lambda_0^2} = C_{\lambda_0^2}^{(a)} + C_{\lambda_0^2}^{(b)} \quad \wedge \quad C_0 = C_0^{(a)} + C_0^{(b)} \quad (4.30)$$

możliwe jest uzyskanie wariantów równań (4.25), (4.27) i (4.28), które są wyrażone przez mierzone wartości  $X_k$ , ze względu na model (4.29). Współczynnik  $C_{\lambda_0^2}$  można wyrazić jako:

$$C_{\lambda_0^2} = k^2 \Delta^2 X_{k-1} + k(p+2)[X_{k+1} - X_{k-1}] + \frac{1}{4}(p+2)[(p+2)X_{k+1} + 2pX_k + (p+2)X_{k-1}] \quad (4.31)$$

postać współczynnika  $C_{\lambda_0^1}$  jako:

$$C_{\lambda_0^1} = a\lambda_0 \Delta^2 X_{k-1} = k\Delta^2 X_{k-1} + \frac{1}{2}(p+2)[X_{k+1} - X_{k-1}] \quad (4.32)$$

oraz współczynnik  $C_0$  jako:

$$C_0 = \Delta^2 X_{k-1} \quad (4.33)$$

Zastosowanie sum zdefiniowanych w (4.30), ze względu na definicje współczynników cząstkowych (4.24), (4.26) i (4.28) oraz współczynników (4.31), (4.32) i (4.33), prowadzi do układu równań postaci:

$$\begin{cases} C_0 = \Delta^2 X_{k-1}^{(a\lambda_0)} + \Delta^2 X_{k-1}^{(b\lambda_0)} \\ C_{\lambda_0^1} = a\lambda_0 \Delta^2 X_{k-1}^{(a\lambda_0)} + b\lambda_0 \Delta^2 X_{k-1}^{(b\lambda_0)} \\ C_{\lambda_0^2} = a^2 \lambda_0^2 \Delta^2 X_{k-1}^{(a\lambda_0)} + b^2 \lambda_0^2 \Delta^2 X_{k-1}^{(b\lambda_0)} \end{cases} \quad (4.34)$$

Należy zwrócić uwagę na to, że nie da się bezpośrednio zsumować prawych stron powyższych równań, jak to było zrobione w przypadku sumowania współczynników (4.31), (4.32) i (4.33), ze względu na potencjalnie różne wartości parametrów  $a$  i  $b$  stojących przy cząstkowych składnikach widma  $\Delta^2 X_k^{(a\lambda_0)}$  i  $\Delta^2 X_k^{(b\lambda_0)}$ . Powyższy układ równań można przedstawić w formie macierzowej:

$$\begin{bmatrix} a^2 \lambda_0^2 & b^2 \lambda_0^2 & -C_{\lambda_0^2} \\ a\lambda_0 & b\lambda_0 & -C_{\lambda_0^1} \\ 1 & 1 & -C_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta^2 X_{k-1}^{(a\lambda_0)} \\ \Delta^2 X_{k-1}^{(b\lambda_0)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Nietrywialne rozwiązanie układu równań jednorodnych istnieje tylko wtedy, gdy wyznacznik macierzy głównej zeruje się, a więc dla powyższego równania:

$$\begin{vmatrix} a^2 \lambda_0^2 & b^2 \lambda_0^2 & -C_{\lambda_0^2} \\ a\lambda_0 & b\lambda_0 & -C_{\lambda_0^1} \\ 1 & 1 & -C_0 \end{vmatrix} = 0 \quad (4.36)$$

Wartość powyższego wyznacznika może zostać bezpośrednio wyliczona z definicji jako:

$$abC_0 \lambda_0^2 - (a+b)C_{\lambda_0^1} \lambda_0 + C_{\lambda_0^2} = 0 \quad (4.37)$$

Powyższe równanie nie zależy od nieznanymi wartości cząstkowych widma  $\Delta^2 X_k^{(a\lambda_0)}$  i  $\Delta^2 X_k^{(b\lambda_0)}$ , a więc jedynym nieznanym parametrem jest  $\lambda_0$ , stąd generowane są dwa pierwiastki ze względu na  $\lambda_0$ :

$$\lambda_{0\pm} = \frac{(a+b)C_{\lambda_0^1} \pm \sqrt{((a+b)C_{\lambda_0^1})^2 + 4abC_0 C_{\lambda_0^2}}}{2abC_0} \quad (4.38)$$

Wybór właściwego rozwiązania wymaga sprawdzenia wartości rzeczywistej i urojonej otrzymanych pierwiastków. Częstotliwość znormalizowana  $\lambda_0$  z założenia powinna przyjmować dodatnie wartości rzeczywiste i takie kryterium należy uwzględnić przy wyborze odpowiedniego pierwiastka (gdy wybrane  $k$  jest z pierwszej połowy dodatniej części widma). Ze względu na występowanie błędów pomiaru wynikających m. in. z ograniczeń arytmetyki procesora, błędów losowych i systematycznych estymatora, po ostatecznym zastosowaniu formuły interpolacyjnej może pojawić się niezerowa wartość urojona mimo właściwie wybranego pierwiastka. Z tego względu, w algorytmie należy użyć operatora  $\text{Re}\{\cdot\}$  do uzyskania wartości rzeczywistej uzyskanej wartości zespolonej. Równanie kwadratowe (4.37) pozwala na znalezienie częstotliwości podstawowej  $\lambda_0$  sygnału złożonego z dwóch zespolonych i harmonicznymi oscylacji (o częstotliwościach stanowiących całkowitą wielokrotność częstotliwości podstawowej:  $\lambda_1 = a\lambda$  i  $\lambda_2 = b\lambda$ ). Jeśli rozważany jest sygnał złożony z próbek o wartościach rzeczywistych, wtedy wartości badanych składowych widmowych są sprzężone względem siebie, a wartości używanych krotności  $a$  i  $b$  muszą być przeciwne, tj.  $a = -b$ . Dzięki temu równanie (4.37) upraszcza się ze względu na to, że  $a + b = 0$ , do postaci:

$$a^2 C_0 \lambda_0^2 = C_{\lambda_0^2} \quad (4.39)$$

Dodatkowo jeśli przyjmując  $a = 1$ , wtedy estymacja dotyczy rzeczywistego sygnału sinusoidalnego o częstotliwości  $\lambda_1 = \lambda_0$  i rozwiązanie przybiera postać:

$$\lambda_0^2 = \frac{C_{\lambda_0^2}}{C_0} \quad (4.40)$$

a po ostatecznym rozwinięciu symboli  $C_{\lambda_0^2}$  i  $C_0$ :

$$\lambda_0^2 = k^2 + \frac{k(p+2)[X_{k+1}^{(a\lambda_0)} - X_{k-1}^{(a\lambda_0)}] + \frac{1}{4}(p+2)[(p+2)X_{k+1}^{(a\lambda_0)} + 2pX_k^{(a\lambda_0)} + (p+2)X_{k-1}^{(a\lambda_0)}]}{\Delta^2 X_{k-1}^{(a\lambda_0)}} \quad (4.41)$$

Uporządkowanie wartości wyrażenia po prawej stronie równania względem prążków DFT skutkuje otrzymaniem formuły:

$$\lambda_0^2 = k^2 + (p+2) \frac{[(p+2+4k)X_{k+1}^{(a\lambda_0)} + 2pX_k^{(a\lambda_0)} + (p+2-4k)X_{k-1}^{(a\lambda_0)}]}{4\Delta^2 X_{k-1}^{(a\lambda_0)}} \quad (4.42)$$

Powyższe wyrażenie jest tożsame z formułą uzyskaną w [37]. W odróżnieniu jednak od wyprowadzenia zamieszczonego w niniejszej rozprawie, autorzy przytoczonej pracy prezentują sposób uzyskania estymatora, który nie jest całkowicie ścisły, uzyskując uogólnienie formuły dla dowolnej wartości parametru  $p$  w sposób heurystyczny. Jednakże autorzy w [37] dodatkowo pokazują, że formuła interpolacyjna (4.42) niweluje sumaryczny wpływ, pochodzący od innych oddalonych składowych częstotliwościowych, poprzez modelowanie jego wartości wielomianem (patrz równanie (3.94)).

## 4.5 Widmo rzeczywistego sygnału sinusoidalnego zakłóconego harmoniczną dla okien GMSD i pięciopunktowa formuła IpDFT

### 4.5.1 Metoda pięciopunktowa dla okien GMSD

Ostatnia z wprowadzanych w niniejszej rozprawie metod interpolacji widma to pięciopunktowa metoda 5pGMSD, która charakteryzuje się formułą interpolacyjną wykorzystującą pięć kolejnych wartości prążków DFT do estymacji częstotliwości podstawowej z bezpośrednim uwzględnieniem dwóch rzeczywistych składowych sinusoidalnych. Podobnie jak w przypadku wcześniejszych metod, proces wyprowadzenia wykorzystuje wyrażenie (4.3), które pozwala na wygenerowanie równania wielomianowego czwartego stopnia do opisu relacji pomiędzy wartościami widma DFT dla pojedynczej oscylacji. Uzyskane równania pozwalają na uwzględnienie w interpolacji dwóch sprzężonych par komponentów częstotliwościowych, których moduły częstotliwości są określone przez krotności  $a$  i  $b$  względem częstotliwości podstawowej  $\lambda_0$ . Cały proces wyprowadzenia metody pięciopunktowej jest bardzo zbliżony do wcześniej omawianego wyprowadzenia metody trzypunktowej. Główną różnicę stanowi wykorzystanie w modelu dwóch rzeczywistych składowych sinusoidalnych, tj. dla czterech oscylacji zespolonych o częstotliwościach  $a\lambda_0$ ,  $-a\lambda_0$ ,  $b\lambda_0$  i  $-b\lambda_0$ . Uzyskanie równania definiującego jednomian  $a^4\lambda_0^4\Delta^4 X_k$  za pomocą wyłącznie znanych wartości wymaga wstępnego znalezienia analogicznych zależności dla jednomianów rzędów trzeciego, drugiego i pierwszego. Jest to główny powód, dla którego wyprowadzenie znacząco się komplikuje w stosunku do metody trzypunktowej. Uwzględnienie modelu dwóch oscylacji sinusoidalnych prowadzi do równania dwukwadratowego, które dostarcza cztery możliwe pierwiastki określające wartość częstotliwości podstawowej  $\lambda_0$ . Przyjęcie odpowiednich założeń co do wartości uzyskanych pierwiastków prowadzi ostatecznie do pięciopunktowej formuły interpolacyjnej.

### 4.5.2 Zależności pięciopunktowe dla pojedynczej oscylacji zespolonej

**Definicje symboli  $C_{\lambda_0^4}^{(a)}$ ,  $C_{\lambda_0^2}^{(a)}$  i  $C_0^{(a)}$  dla jednomianów zawierających częstotliwość  $\lambda_0$**

Opis wyprowadzenia estymatora pięciopunktowego należy rozpocząć od definicji współczynników  $C_x^a$  dla przypadku pięciu punktów (na podstawie współczynnika  $\Delta^4 X_{k-2}^{(a\lambda_0)}$ ) i pojedynczej składowej o częstotliwości  $a\lambda_0$ , analogicznie jak w przypadku wyprowadzenia estymatora trzypunktowego:

$$C_{\lambda_0^4}^{(a)} = a^4 \lambda_0^4 \Delta^4 X_{k-2}^{(a\lambda_0)} \quad (4.43)$$

$$C_{\lambda_0^2}^{(a)} = a^2 \lambda_0^2 \Delta^4 X_{k-2}^{(a\lambda_0)} \quad (4.44)$$

$$C_0^{(a)} = \Delta^4 X_{k-2}^{(a\lambda_0)} \quad (4.45)$$

Otrzymanie formuły interpolacyjnej według proponowanej procedury wymaga przedstawienia wartości powyższych współczynników wyłącznie przy użyciu znanych wartości parametrów (przy zastrzeżeniu, że wartości cząstkowe widma  $X_k^{(h\lambda_0)}$  są eliminowane w późniejszym etapie). Wyrażenie (4.45) automatycznie spełnia to wymaganie.

**Wyrażenie definiujące wartość jednomianu  $a^2 \Delta^4 X_{k-2}^{(a\lambda_0)}$**

Otrzymanie rozwinięcia wartości  $a^2 \Delta^4 X_{k-2}^{(a\lambda_0)}$  (4.44) jest stosunkowo łatwe, jeśli wykorzystana zostanie relacja (4.23). Użycie definicji różnicy skończonej (4.4) dwukrotnie, ze względu na współczynnik  $\Delta^4 X_{k-2}^{(a\lambda_0)}$ , prowadzi do postaci:

$$\Delta^4 X_{k-2}^{(a\lambda_0)} = \Delta^2 X_k^{(a\lambda_0)} - 2\Delta^2 X_{k-1}^{(a\lambda_0)} + \Delta^2 X_{k-2}^{(a\lambda_0)} \quad (4.46)$$

Trzy współczynniki różnic skończonych znajdujące się po prawej stronie powyższego równania mogą zostać przepisane za pomocą wyrażenia (4.23), po wcześniejszym przemnożeniu obu stron przez wartość  $a^2 \lambda_0$ . Wówczas jednomiany  $a^2 \lambda_0 \Delta^2 X_k^{(a\lambda_0)}$ ,  $a^2 \lambda_0 \Delta^2 X_{k-1}^{(a\lambda_0)}$  oraz  $a^2 \lambda_0 \Delta^2 X_{k-2}^{(a\lambda_0)}$  mogą zostać rozwinięte do postaci niezależnej od  $\lambda_0$  przez odpowiednie podstawienie wartości parametru  $k$  na  $k-1$  i  $k-2$ . Otrzymane w ten sposób wyrażenie na  $a^2 \lambda_0^2 \Delta^4 X_{k-2}^{(a\lambda_0)}$  może zostać zapisane za pomocą współczynnika  $C_{\lambda_0^2}^{(a)}$  w następujący sposób:

$$\begin{aligned} C_{\lambda_0^2}^{(a)} = & k^2 \Delta^4 X_{k-2}^{(a\lambda_0)} + k(p+4) \left[ \Delta^2 X_k^{(a\lambda_0)} - \Delta^2 X_{k-2}^{(a\lambda_0)} \right] \\ & + \frac{1}{4}(p+2) \left[ 4(X_{k+2}^{a\lambda_0} - 2X_k^{a\lambda_0} + X_{k-2}^{a\lambda_0}) + 2p\Delta^2 X_{k-1}^{(a\lambda_0)} \right] \\ & + \frac{1}{4}(p+2)^2 (\Delta^2 X_k^{(a\lambda_0)} + \Delta^2 X_{k-2}^{(a\lambda_0)}) \quad (4.47) \end{aligned}$$

Prawa strona powyższego równania nie zależy od szukanej wartości częstotliwości podstawowej  $\lambda_0$ .

**Wyrażenie definiujące wartość jednomianu  $\Delta^4 X_{k-2}^{(a\lambda_0)} (-a\lambda_0 + k)^4$**

Druga część wyprowadzenia skupia się na otrzymaniu analogicznego wyrażenia dla jednomianu  $a^4 \lambda_0^4 \Delta^4 X_{k-2}^{(a\lambda_0)}$  (współczynnik  $C_{\lambda_0^4}^{(a)}$  (4.43)), którego uzyskanie stanowi główną trudność w opisywanej procedurze. W tym celu powtórzona została sekwencja, której opis zamieszczono w rozdziale 4.4, złożona z kroków opisanych równaniami od (4.17) do (4.19). Pierwszym etapem jest znalezienie wyrażenia opisującego relację zachodzącą pomiędzy współczynnikiem  $\Delta^4 X_{k-2}^{(a\lambda_0)}$  a jego środkowym prążkiem  $X_k^{(a\lambda_0)}$  (odpowiednik równania na (4.18)). W tym celu należy dwukrotnie powtórzyć rozwinięcie równania (4.18) z pomocą definicji współczynnika różnicy skończonej (4.4). Najpierw współczynnik  $\Delta^3 X_{k-1}^{(a\lambda_0)}$  można bezpośrednio rozwinąć do postaci:

$$\Delta^3 X_{k-1}^{(a\lambda_0)} = \Delta^2 X_k^{(a\lambda_0)} - \Delta^2 X_{k-1}^{(a\lambda_0)} \quad (4.48)$$

i dalej korzystając z równania (4.18) dla obu współczynników drugiego stopnia ( $k$  i  $k-1$ ) rozszerzyć powyższe równanie do postaci:

$$\Delta^3 X_{k-1}^{(a\lambda_0)} = (p+1)(p+2) \left( \frac{X_{k+1}^{(a\lambda_0)}}{(a\lambda_0 - k - 1)^2 - \left(1 + \frac{p}{2}\right)^2} - \frac{X_k^{(a\lambda_0)}}{(a\lambda_0 - k)^2 - \left(1 + \frac{p}{2}\right)^2} \right) \quad (4.49)$$

Ponieważ znane jest wyrażenie (4.20) opisujące relację pomiędzy prążkami  $X_k$  oraz  $X_{k+1}$ , powyższe równanie można przepisać eliminując wartość  $X_{k+1}$ . Dodatkowo należy zmienić postać wielomianu w mianownikach do postaci iloczynowej. Ostatecznie równanie

przyjmuje następującą postać:

$$\Delta^3 X_{k-1}^{(a\lambda_0)} = (p+1)(p+2)X_k^{(a\lambda_0)} \left( \frac{(a\lambda_0 - k + \frac{p}{2})}{\left(a\lambda_0 - k - 1 - \frac{p}{2}\right) \left(a\lambda_0 - k - 1 + 1 + \frac{p}{2}\right) \left(a\lambda_0 - k - 1 - 1 - \frac{p}{2}\right)} - \frac{1}{\left(a\lambda_0 - k + 1 + \frac{p}{2}\right) \left(a\lambda_0 - k - 1 - \frac{p}{2}\right)} \right) \quad (4.50)$$

które po uproszczeniu może zostać zapisane jako:

$$\Delta^3 X_{k-1}^{(a\lambda_0)} = (p+1)(p+2)X_k^{(a\lambda_0)} \left( \frac{1}{\left(a\lambda_0 - k - 1 - \frac{p}{2}\right) \left(a\lambda_0 - k - 2 - \frac{p}{2}\right)} - \frac{1}{\left(a\lambda_0 - k + 1 + \frac{p}{2}\right) \left(a\lambda_0 - k - 1 - \frac{p}{2}\right)} \right) \quad (4.51)$$

Znalezienie wspólnego mianownika dla powyższego wyrażenia skutkuje dalszym uproszczeniem równania do następującej postaci:

$$\Delta^3 X_{k-1}^{(a\lambda_0)} = (p+1)(p+2)X_k^{(a\lambda_0)} \left( \frac{\left(a\lambda_0 - k + 1 + \frac{p}{2}\right) - \left(a\lambda_0 - k - 2 - \frac{p}{2}\right)}{\left(a\lambda_0 - k + 1 + \frac{p}{2}\right) \left(a\lambda_0 - k - 1 - \frac{p}{2}\right) \left(a\lambda_0 - k - 2 - \frac{p}{2}\right)} \right) \quad (4.52)$$

co ostatecznie prowadzi do równania wiążącego wartość prążka  $X_k^{(a\lambda_0)}$  ze współczynnikiem  $\Delta^3 X_{k-1}^{(a\lambda_0)}$ :

$$\Delta^3 X_{k-1}^{(a\lambda_0)} = \left( \frac{(p+1)(p+2)(p+3)X_k^{(a\lambda_0)}}{\left(a\lambda_0 - k + 1 + \frac{p}{2}\right) \left(a\lambda_0 - k - 1 - \frac{p}{2}\right) \left(a\lambda_0 - k - 2 - \frac{p}{2}\right)} \right) \quad (4.53)$$

Ten sam proces (zależności od (4.48) do (4.53)) może być zastosowany do znalezienia zależności dla współczynnika  $\Delta^4 X_{k-2}^{(a\lambda_0)}$ . Rozpoczynając od definicji współczynnika różnicy skończonej:

$$\Delta^4 X_{k-2}^{(a\lambda_0)} = \Delta^3 X_{k-1}^{(a\lambda_0)} - \Delta^3 X_{k-2}^{(a\lambda_0)} \quad (4.54)$$

powtórzono wyprowadzenie za pomocą wyrażenia (4.53). Znajdujące się w liczniku wartości prążków DFT mogą zostać wyrażone wyłącznie z użyciem wartości  $X_k^{(a\lambda_0)}$  i stąd w mianowniku wyrażenia pojawia się kolejny czynnik iloczynu w postaci wyrażenia  $(a\lambda_0 - k + 2 + \frac{p}{2})$ . Po sprowadzeniu powstałych ułamków do wspólnego mianownika, równanie wyrażające współczynnik  $\Delta^4 X_{k-2}^{(a\lambda_0)}$  przybiera postać:

$$\Delta^4 X_{k-2}^{(a\lambda_0)} = (p+1)(p+2)(p+3)X_k^{(a\lambda_0)} \left( \frac{\left(a\lambda_0 - k + 2 + \frac{p}{2}\right) - \left(a\lambda_0 - k - 2 - \frac{p}{2}\right)}{\left(a\lambda_0 - k + 2 + \frac{p}{2}\right) \left(a\lambda_0 - k + 1 + \frac{p}{2}\right) \left(a\lambda_0 - k - 1 - \frac{p}{2}\right) \left(a\lambda_0 - k - 2 - \frac{p}{2}\right)} \right) \quad (4.55)$$



które po uproszczeniach ostatecznie prowadzi do:

$$\Delta^4 X_{k-2}^{(a\lambda_0)} = \frac{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)X_k^{(a\lambda_0)}}{\left[(-a\lambda_0+k)^2 - \left(1 + \frac{p}{2}\right)^2\right] \left[(-a\lambda_0+k)^2 - \left(2 + \frac{p}{2}\right)^2\right]} \quad (4.56)$$

Powyższe wyrażenie pozwala na otrzymanie równania określającego wartość  $(a\lambda_0+k)^4$  poprzez obustronne przemnożenie tego równania przez wyrażenie znajdujące się w mianowniku ułamka po prawej stronie. Następnie rozwinięcie wszystkich współczynników po lewej stronie i dalsze uporządkowanie jednomianów równania prowadzi do następującej postaci:

$$\begin{aligned} \Delta^4 X_{k-2}^{(a\lambda_0)} (-a\lambda_0+k)^4 &= -\Delta^4 X_{k-2}^{(a\lambda_0)} \left(1 + \frac{p}{2}\right)^2 \left(2 + \frac{p}{2}\right)^2 \\ &+ \left[\left(1 + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(2 + \frac{p}{2}\right)^2\right] \left[ (p+1)(p+2)\Delta^2 X_{k-1}^{(a\lambda_0)} + \left(1 + \frac{p}{2}\right)^2 \Delta^4 X_{k-2}^{(a\lambda_0)} \right. \\ &+ \left. \left(\Delta^2 X_k^{(a\lambda_0)} + \Delta^2 X_{k-2}^{(a\lambda_0)}\right) + (p+2)(X_{k+2} - 2X_k + X_{k-2}) \right] + (p+1)(p+2)(p+3)(p+4)X_k \end{aligned} \quad (4.57)$$

### Wyrażenia definiujące wartość dla współczynnika pięciopunktowego

Kolejnym krokiem na drodze do uzyskania szukanego wyrażenia jest wyodrębnienie jednomianu  $a^4 \lambda_0^4 \Delta^4 X_{k-2}^{(a\lambda_0)}$  z powyższego równania, co umożliwi wyrażenie symbolu  $C_{\lambda_0^4}^{(a)}$  zgodnie z (4.43). Bezpośrednie podniesienie do czwartej potęgi wyrażenia  $(a^4 \lambda_0 - k)^4$  generuje dodatkowe jednomiany zależne od szukanej wartości częstotliwości podstawowej  $\lambda_0$ : zawierające wyrażenia  $a\lambda_0 \Delta^4 X_{k-2}^{(a\lambda_0)}$ ,  $a^2 \lambda_0^2 \Delta^4 X_{k-2}^{(a\lambda_0)}$  oraz  $a^3 \lambda_0^3 \Delta^4 X_{k-2}^{(a\lambda_0)}$ . Równanie definiujące wartość  $a^2 \lambda_0^2 \Delta^4 X_{k-2}^{(a\lambda_0)}$  zostało już wyprowadzone wcześniej (4.47), zatem konieczne jest znalezienie wartości dla dwóch pozostałych. Wyrażenie pozwalające na ustalenie wartości  $a\lambda_0 \Delta^4 X_{k-2}^{(a\lambda_0)}$  uzyskuje się za pomocą wyrażenia na  $a\lambda_0 \Delta^2 X_{k-1}^{(a\lambda_0)}$  (4.24) oraz przez rozwinięcie współczynnika  $\Delta^4 X_{k-2}^{(a\lambda_0)}$ , zgodnie z definicją (4.46), kolejno przez rozwinięcie wyrażenia na  $a\lambda_0 \Delta^2 X_{k-2}^{(a\lambda_0)}$ ,  $a\lambda_0 \Delta^2 X_{k-1}^{(a\lambda_0)}$  oraz na  $a\lambda_0 \Delta^2 X_k^{(a\lambda_0)}$ . Po uproszczeniu szukane wyrażenie przybiera następującą postać:

$$a\lambda_0 \Delta^4 X_{k-2}^{(a\lambda_0)} = k\Delta^4 X_{k-2}^{(a\lambda_0)} + \frac{1}{2}(p+4) \left[ X_{k+2}^{(a\lambda_0)} - 2X_{k-1}^{(a\lambda_0)} + 2X_{k-1}^{(a\lambda_0)} - X_{k-2}^{(a\lambda_0)} \right] \quad (4.58)$$

**Pośrednie zależności czteropunktowe**  $(-a\lambda_0+k)\Delta^3 X_{k-1}^{(a\lambda_0)}$ ,  $(-a\lambda_0+k)^2\Delta^3 X_{k-1}^{(a\lambda_0)}$  oraz  $(-a\lambda_0+k)^2\Delta^3 X_{k-1}^{(a\lambda_0)}$

Pośrednim etapem służącym wyprowadzeniu zależności wiążących wartość  $\lambda_0^3$  ze współczynnikiem pięciopunktowym jest znalezienie wyrażeń zawierających współczynniki różnic trzeciego stopnia  $\Delta^3 X_{k-1}^{(a\lambda_0)}$ , a więc czteropunktowych. W celu uzyskania wartości wyrażenia  $\Delta^3 X_{k-1}^{(a\lambda_0)} (-a\lambda_0+k)^3$  należy najpierw otrzymać wyrażenia dwóch niższych potęg  $\Delta^3 X_{k-1}^{(a\lambda_0)} (-a\lambda_0+k)$  i  $\Delta^3 X_{k-1}^{(a\lambda_0)} (-a\lambda_0+k)^2$ . Pierwsze z nich można otrzymać używając wcześniej zapisanego równania definiującego  $\Delta^2 X_{k-1}^{(a\lambda_0)} (-a\lambda_0+k)$  (4.22) i samej definicji współczynnika różnicy skończonej. Po odjęciu od siebie uzyskanych w taki sposób współczynników niższego rzędu otrzymano wyrażenie na  $\Delta^3 X_{k-1}^{(a\lambda_0)} (-a\lambda_0+k)$ :

$$\Delta^3 X_{k-1}^{(a\lambda_0)} (-a\lambda_0+k) = -\frac{1}{2}(p+2) [X_{k+2} - X_{k+1} - X_k + X_{k-1}] - \Delta^2 X_k^{(a\lambda_0)} \quad (4.59)$$

Dokładnie ta sama procedura może zostać wykorzystana do wyznaczenia wartości wyrażenia  $\Delta^3 X_{k-1}^{(a\lambda_0)}(-a\lambda_0 + k)^2$ . Tym razem należy skorzystać z równania definiującego wartość  $\Delta^2 X_{k-1}^{(a\lambda_0)}(-a\lambda_0 + k)^2$  (4.18). Po odjęciu od siebie wartości dwóch współczynników niższego rzędu otrzymano wyrażenie:

$$\begin{aligned} \Delta^3 X_{k-1}^{(a\lambda_0)}(-a\lambda_0 + k)^2 &= (p+1)(p+2) [X_{k+1}^{(a\lambda_0)} - X_k^{(a\lambda_0)}] \\ &\quad + (1 + \frac{p}{2})^2 \Delta^3 X_{k-1}^{(a\lambda_0)} + (p+2)(X_{k+2}^{(a\lambda_0)} - X_k^{(a\lambda_0)}) + \Delta^2 X_k^{(a\lambda_0)} \end{aligned} \quad (4.60)$$

Wyrażenie określające wartość jednomianu  $\Delta^3 X_{k-1}^{(a\lambda_0)}(-a\lambda_0 + k)^3$  wymaga użycia procedury rozwijania współczynnika  $\Delta^3 X_{k-1}^{(a\lambda_0)}$  w ten sam sposób jak przy uzyskaniu równania na  $a\lambda_0 \Delta^4 X_{k-2}^{(a\lambda_0)}$  (4.58). Wymnożenie mianownika w równaniu (4.53) pozwala na otrzymanie wyrażenia:

$$\Delta^3 X_{k-1}^{(a\lambda_0)} \left[ (-a\lambda_0 + k)^2 - (1 + \frac{p}{2})^2 \right] (-a\lambda_0 + k + 2 + \frac{p}{2}) = (p+1)(p+2)(-p-3)X_k^{(a\lambda_0)} \quad (4.61)$$

które po rozwinięciu lewej strony równania i uporządkowaniu wartości pozwala na otrzymanie zależności:

$$\begin{aligned} \Delta^3 X_{k-1}^{(a\lambda_0)}(-a\lambda_0 + k)^3 &= \\ &\quad \Delta^3 X_{k-1}^{(a\lambda_0)}(-a\lambda_0 + k)(1 + \frac{p}{2})^2 + \Delta^3 X_{k-1}^{(a\lambda_0)}(2 + \frac{p}{2})(1 + \frac{p}{2})^2 \\ &\quad - \Delta^3 X_{k-1}^{(a\lambda_0)}(-a\lambda_0 + k)^2(2 + \frac{p}{2}) + (p+1)(p+2)(-p-3)X_k^{(a\lambda_0)} \end{aligned} \quad (4.62)$$

dla której z kolei można zastosować wartości z (4.59) i (4.60) w celu rozwinięcia jednomianów zawierających kolejno  $(-a\lambda_0 + k)$  i  $(-a\lambda_0 + k)^2$ . Ostatecznie wyrażenie definiujące jednomian  $\Delta^3 X_{k-1}^{(a\lambda_0)}(-a\lambda_0 + k)^3$  przedstawia się jako:

$$\begin{aligned} \Delta^3 X_{k-1}^{(a\lambda_0)}(-a\lambda_0 + k)^3 &= \Delta^3 X_{k-1}^{(a\lambda_0)}(-a\lambda_0 + k)(1 + \frac{p}{2})^2 \\ &\quad + \Delta^3 X_{k-1}^{(a\lambda_0)}(2 + \frac{p}{2})(1 + \frac{p}{2})^2 - \Delta^3 X_{k-1}^{(a\lambda_0)}(-a\lambda_0 + k)^2(2 + \frac{p}{2}) \\ &\quad + (p+1)(p+2)(-p-3)X_k^{(a\lambda_0)} \end{aligned} \quad (4.63)$$

#### Wyrażenie definiujące wartość jednomianu $a^4 \lambda_0 \Delta^4 X_{k-2}^{(a\lambda_0)}$

Ponieważ docelowym współczynnikiem skończonym dla wyprowadzanej metody jest  $\Delta^4 X_{k-2}^{(a\lambda_0)}$ , powyższe równanie należy zestawić z definicją tego współczynnika z (4.54) wraz z zależnością określającą jednomian  $\Delta^3 X_{k-1}(-a\lambda_0 + k)$ (4.59) i rozwinąć do następującej postaci:

$$\begin{aligned} (a\lambda_0 - k)^3 \Delta^4 X_{k-2}^{(a\lambda_0)} &= \\ &\quad - \left( \frac{1}{2}(p+2) [X_{k+2} - 2X_{k+1} + 2X_{k-1} - X_{k-2}] - \Delta^3 X_{k-1}^{(a\lambda_0)} \right) \left( 1 + \frac{p}{2} \right)^2 \\ &\quad - \left( (p+1)(p+2)\Delta^2 X_{k-1}^{(a\lambda_0)} + (p+2) [X_{k+2}^{(a\lambda_0)} - X_{k+1}^{(a\lambda_0)} - X_k^{(a\lambda_0)} + X_{k-1}^{(a\lambda_0)}] + \Delta^3 X_{k-1}^{(a\lambda_0)} \right) \left( 2 + \frac{p}{2} \right) \\ &\quad + (p+1)(p+2)(-p-3) \left( X_k^{(a\lambda_0)} - X_{k-1}^{(a\lambda_0)} \right) - 3 \left( (p+1)(p+2)(X_k^{(a\lambda_0)} - X_{k-1}^{(a\lambda_0)}) + (1 + \frac{p}{2})^2 \Delta^3 X_{k-2}^{(a\lambda_0)} \right) \\ &\quad + 3 \left( \frac{1}{2}(p+2)(-X_{k+1}^{(a\lambda_0)} - X_k^{(a\lambda_0)} + X_{k-1}^{(a\lambda_0)} + X_{k-2}^{(a\lambda_0)}) \right) - \Delta^3 X_{k-2}^{(a\lambda_0)} \end{aligned} \quad (4.64)$$

Otrzymanie ostatecznego wyrażenia określającego wartość symbolu  $C_{\lambda_4}^{(a)} = a^4 \lambda_0^4 \Delta^4 X_{k-2}^{(a\lambda_0)}$  (4.45) wymaga rozkładu wartości  $(a\lambda_0 - k)^4 \Delta^4 X_{k-2}^{(a\lambda_0)}$  z równania (4.57) na inne wartości wyrażone przez  $a\lambda_0 \Delta^4 X_{k-2}^{(a\lambda_0)}$  (4.47),  $a^2 \lambda_0^2 \Delta^4 X_{k-2}^{(a\lambda_0)}$  (4.58) oraz przez aproksymację  $a^3 \lambda_0^3 \Delta^4 X_{k-2}^{(a\lambda_0)} \approx (a\lambda_0 - k)^3 \Delta^4 X_{k-2}^{(a\lambda_0)}$  (4.64), która jest wystarczająca dla wartości  $a\lambda_0 < N/4$  i  $k$  wybranym blisko częstotliwości  $a\lambda_0$  (jak pokazano dalej w symulacjach w rozdziale 5.5.1). Żmudny proces rozwinięcia jednomianów z kolejnymi potęgami i dalszego upraszczania skutkuje w otrzymaniu zależności definiującej symbol  $C_{\lambda_4}^{(a)}$ :

$$\begin{aligned}
C_{\lambda_4}^{(a)} = & k^4 \Delta^4 X_{k-2}^{(a\lambda_0)} + 2k^3(p+4) \left[ \Delta^2 X_k^{(a\lambda_0)} - \Delta^2 X_{k-2}^{(a\lambda_0)} \right] \\
& + 6k^2 \left( \Delta^2 X_{k-2}^{(a\lambda_0)} + \Delta^2 X_k^{(a\lambda_0)} \right) - 6k^2(p+2) \Delta^2 X_{k-1}^{(a\lambda_0)} \\
& + 6k^2(p+2) \left[ \frac{1}{4}(p+6)(X_{k+2}^{(a\lambda_0)} - 2X_k^{(a\lambda_0)} + X_{k-2}^{(a\lambda_0)}) \right] \\
& + k(p+2)^2 \left( \frac{1}{2}(p+4)(\Delta^2 X_k^{(a\lambda_0)} - \Delta^2 X_{k-2}^{(a\lambda_0)}) + 2\Delta^3 X_{k-2}^{(a\lambda_0)} \right) \\
& \quad + 4k\Delta^3 X_{k-2}^{(a\lambda_0)} + 2k(p+4)\Delta^3 X_{k-1}^{(a\lambda_0)} \\
& \quad + 2k(p+1)(p+2)(p+4)\Delta^2 X_{k-1}^{(a\lambda_0)} \\
& + 2k(p+2)(p+4)(X_{k+2}^{(a\lambda_0)} - X_{k+1}^{(a\lambda_0)} - X_k^{(a\lambda_0)} + X_{k-1}^{(a\lambda_0)}) \\
& \quad + 4k(p+1)(p+2)(p+6) \left( X_k^{(a\lambda_0)} - X_{k-1}^{(a\lambda_0)} \right) \\
& \quad - 6k(p+2) \left( -X_{k+1}^{(a\lambda_0)} - X_k^{(a\lambda_0)} + X_{k-1}^{(a\lambda_0)} + X_{k-2}^{(a\lambda_0)} \right) \\
& + (p+3) \left[ \prod_{i=1}^2 \left( i + \frac{p}{2} \right)^2 \right] \left[ p\Delta^2 X_{k-1}^{(a\lambda_0)} + (X_{k+2} - 2X_k + X_{k-2}) \right] \\
& \quad + \Delta^4 X_{k-2}^{(a\lambda_0)} \left( 1 + \frac{p}{2} \right)^4 + (p+1)(p+2)(p+3)(p+4)X_k \quad (4.65)
\end{aligned}$$

### 4.5.3 Pięciopunktowa formuła interpolacyjna

Przejście od wyrażeń określonych dla pojedynczej oscylacji zespolonej do wyrażeń dla sygnału składającego się z czterech komponentów częstotliwościowych o częstotliwościach unormowanych  $a\lambda_0$ ,  $-a\lambda_0$ ,  $b\lambda_0$  oraz  $-b\lambda_0$  może zostać przeprowadzone w ten sam sposób jak dla metody trzypunktowej. Superpozycja wartości przecieku widma pochodzącego od każdej składowej dla  $k$ -ego prążka DFT wyrażona jest przez sumę:

$$X_k = X_k^{(a\cdot\lambda_0)} + X_k^{(-a\cdot\lambda_0)} + X_k^{(b\cdot\lambda_0)} + X_k^{(-b\cdot\lambda_0)} \quad (4.66)$$

Analogicznie jak w przypadku metody trzypunktowej, wprowadzone zostają symbole  $C_x$ , których wartości zależą od pełnego modelu (4.66):

$$C_4 = C_{\lambda_0^4}^{(a)} + C_{\lambda_0^4}^{(b)} + C_{\lambda_0^4}^{(-a)} + C_{\lambda_0^4}^{(-b)} \quad (4.67)$$

$$C_2 = C_{\lambda_0^2}^{(a)} + C_{\lambda_0^2}^{(b)} + C_{\lambda_0^2}^{(-a)} + C_{\lambda_0^2}^{(-b)} \quad (4.68)$$

$$C_0 = C_0^{(a)} + C_0^{(b)} + C_0^{(-a)} + C_0^{(-b)} \quad (4.69)$$

Zsumowanie prawych stron powyższych równań jest możliwe ze względu na występowanie zależności liniowych wartości cząstkowych  $X_k^{(\pm a, b)}$  względem innych parametrów.

Wobec tego symbole  $C_4$ ,  $C_2$  i  $C_0$  mogą zostać wyrażone jako:

$$\begin{aligned}
C_4 = & k^4 \Delta^4 X_{k-2} + 2k^3(p+4) \left[ \Delta^2 X_k - \Delta^2 X_{k-2} \right] \\
& + 6k^2 \left( \Delta^2 X_{k-2} + \Delta^2 X_k \right) - 6k^2(p+2) \Delta^2 X_{k-1} \\
& + 6k^2(p+2) \left[ \frac{1}{4}(p+6)(X_{k+2} - 2X_k + X_{k-2}) \right] \\
& + k(p+2)^2 \left( \frac{1}{2}(p+4)(\Delta^2 X_k - \Delta^2 X_{k-2}) + 2\Delta^3 X_{k-2} \right) \\
& + 4k\Delta^3 X_{k-2} + 2k(p+4)\Delta^3 X_{k-1} \\
& + 2k(p+1)(p+2)(p+4)\Delta^2 X_{k-1} \\
& + 2k(p+2)(p+4)(X_{k+2} - X_{k+1} - X_k + X_{k-1}) \\
& + 4k(p+1)(p+2)(p+6)(X_k - X_{k-1}) \\
& - 6k(p+2)(-X_{k+1} - X_k + X_{k-1} + X_{k-2}) \\
& + (p+3) \left[ \prod_{i=1}^2 \left( i + \frac{p}{2} \right)^2 \right] \left[ p\Delta^2 X_{k-1} + (X_{k+2} - 2X_k + X_{k-2}) \right] \\
& + \Delta^4 X_{k-2} \left( 1 + \frac{p}{2} \right)^4 + (p+1)(p+2)(p+3)(p+4)X_k \quad (4.70)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_2 = & k^2 \Delta^4 X_{k-2} + k(p+4) \left[ \Delta^2 X_k - \Delta^2 X_{k-2} \right] \\
& + \frac{1}{4}(p+2) \left[ 4(X_{k+2} - 2X_k + X_{k-2}) + 2p\Delta^2 X_{k-1} \right] \\
& + \frac{1}{4}(p+2)^2 (\Delta^2 X_k + \Delta^2 X_{k-2}) \quad (4.71)
\end{aligned}$$

$$C_0 = \Delta^4 X_{k-2} \quad (4.72)$$

Wykorzystanie początkowych definicji (4.43), (4.44) i (4.45) dla wszystkich czterech składowych w sygnale wraz z definicjami (4.67), (4.68) i (4.69) pozwala na wygenerowanie układu równań:

$$\begin{bmatrix} a^4 \lambda_0^4 & b^4 \lambda_0^4 & -C_4 \\ a^2 \lambda_0^2 & b^2 \lambda_0^2 & -C_2 \\ 1 & 1 & -C_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta^4 X_{k-2}^{(+a\lambda_0)} + \Delta^4 X_{k-2}^{(-a\lambda_0)} \\ \Delta^4 X_{k-2}^{(+b\lambda_0)} + \Delta^4 X_{k-2}^{(-b\lambda_0)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

gdzie symbole  $C_0$ ,  $C_2$  oraz  $C_4$  mogą zostać wyrażone przy użyciu (4.70), (4.71) oraz (4.72). Wartości tych współczynników są znane, złożone z wartości zespolonych prążków DFT uzyskanych w pomiarze wraz ze znanymi wartościami parametrów. Nietrywialne rozwiązanie tego jednorodnego układu równań liniowych istnieje tylko wtedy, gdy wartość wyznacznika macierzy głównej zeruje się:

$$\begin{vmatrix} a^4 \lambda_0^4 & b^4 \lambda_0^4 & -C_4 \\ a^2 \lambda_0^2 & b^2 \lambda_0^2 & -C_2 \\ 1 & 1 & -C_0 \end{vmatrix} = 0 \quad (4.74)$$

Wartość powyższego wyznacznika może zostać bezpośrednio wyliczona z definicji:

$$C_0 a^2 b^2 \lambda_0^4 - C_2 (a^2 + b^2) \lambda_0^2 + C_4 = 0 \quad (4.75)$$

Ostateczne wyrażenie przyjmuje postać równania dwukwadratowego. Z tego względu łatwo jest je rozwiązać przy pomocy założenia  $z = \lambda_0^2$  i dalej rozwiązując otrzymane równanie kwadratowe ze zmienną  $z$ . Rozwiązania przyjmują postać:

$$z_{\pm} = \frac{C_2(a^2 + b^2) \pm \sqrt{C_2^2(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2C_0C_4}}{2a^2b^2C_0} \quad (4.76)$$

Powyzsze równanie generuje cztery pierwiastki  $\lambda_0 = \sqrt{z_+}$ ,  $-\sqrt{z_+}$ ,  $\sqrt{z_-}$  oraz  $-\sqrt{z_-}$ . Dwa następujące warunki określają jednoznacznie szukany pierwiastek określający estymowaną częstotliwość: część rzeczywista musi być dodatnia (tak jak mierzona częstotliwość jest dodatnia) oraz część urojona musi wynosić zero. Tak jak opisywano wcześniej, ze względu na różne źródła błędów, wyjściowa wartość może zawierać niezerową część urojoną. W tym przypadku kryterium wyboru pierwiastka powinno opierać się na wybraniu najmniejszej wartości modułu części urojonej.

W celu uzyskania formuły mającej praktyczne znaczenie dla pomiaru sygnałów zawierających rzeczywistą składową podstawową, zwykle najlepszym rozwiązaniem jest założenie wartości parametrów  $a = 1$  oraz  $b = 2$  dla obecności harmonicznej drugiego rzędu lub  $b = 3$  dla rzędu trzeciego. Dla przypadku drugiej harmonicznej  $b = 2$  formuła (4.76) przybiera postać:

$$\lambda_0 = \text{Re} \left\{ \pm \sqrt{\frac{5C_2 \pm \sqrt{25C_2^2 - 16C_0C_4}}{8C_0}} \right\} \quad (4.77)$$

oraz dla rzeczywistej składowej harmonicznej trzeciego rzędu:

$$\lambda_0 = \text{Re} \left\{ \pm \sqrt{\frac{10C_2 \pm \sqrt{100C_2^2 - 36C_0C_4}}{18C_0}} \right\} \quad (4.78)$$

Operator  $\text{Re}\{\cdot\}$  wyznacza część rzeczywistą uzyskanej wartości zespolonej, gdy wyliczona wartość  $\lambda_0$  nie jest liczbą rzeczywistą.

#### 4.5.4 Algorytm estymacji częstotliwości z użyciem nowych metod na przykładzie metody pięciopunktowej

W praktycznym systemie pomiarowym estymacja częstotliwości z wykorzystaniem formuł interpolacyjnych metody dwupunktowej 2pGMSD (4.12), trzypunktowej 3pGMSD (4.38) lub pięciopunktowej 5pGMSD (4.76) zwykle wymaga wdrożenia pełnego toru przetwarzania sygnału. W najbardziej standardowym przypadku taki system składa się z części analogowej służącej akwizycji sygnału i cyfrowej jednostki przetwarzającej. W części cyfrowego przetwarzania sygnału realizowane są etapy: nałożenia okna czasowego na uzyskane próbki sygnału; obliczenia wartości widma DFT z użyciem szybkiego algorytmu FFT; wyszukania centralnego indeksu do ustalenia używanych w interpolacji wartości DFT; wyznaczenia wartości częstotliwości przy pomocy formuły interpolacyjnej – szczegółowy opis, na przykładzie metody pięciopunktowej 5pGMSD, został przedstawiony w postaci opisu Algorytmu 1. Wprowadzone w niniejszej rozprawie są metodami nieiteracyjnymi, tj. takimi, które wykorzystują bezpośrednią formułę interpolacyjną. Z tego powodu koszt obliczeniowy zastosowania samego estymatora stanowi małą część wszystkich obliczeń (patrz rozdział 5.6) i może zostać wdrożony małymi nakładami w istniejącym systemie wykorzystującym FFT.

---

**Algorytm 1** Metoda 5pGMSD - opis procedury estymacji

---

**Dane wejściowe:**  $\mathbf{x} = [x_0, \dots, x_{N-1}]$ ,  $N$ ,  $p$ ,  $a$ ,  $b$

**Szukana wartość:**  $\lambda_0$

1. próbkowanie sygnału ciągłego  $x(t) \rightarrow x(n)$  dla  $n \in \{0, \dots, N-1\}$
  2. nałóż okno GMSD  $x_w(n) = w_p(n) \cdot x(n)$  dla  $n \in \{0, \dots, N-1\}$
  3. oblicz DFT  $X_k^{\text{meas}} = \text{FFT}\{x_w(n)\}$  dla  $n \in \{0, \dots, N-1\}$
  4. znajdź indeks  $k$  (zwykle wyszukanie maksimum modułu  $X_k^{\text{meas}}$ );  
należy założyć, że zmierzone  $X_k^{\text{meas}}$  reprezentuje pełen model  $X_k^{\text{meas}} = X_k = \sum_h X_k^h$
  5. (opcjonalnie) dobierz wartości parametrów  $a$  i  $b$  ze względu na wartości lokalnych maksimumów związanych z występowaniem harmonicznych niskiego rzędu
  6. oblicz  $C_0(4.67)$ ,  $C_2(4.68)$ ,  $C_4(4.69)$  za pomocą  $k$ ,  $p$ ,  $X_k$  i  $\Delta^n X_k$
  7. oblicz pierwiastki (4.76)
  8. wybierz pierwiastek  $\lambda_0$  ze względu na kryteria  $Re\{\lambda_0\} > 0 \wedge Im\{\lambda_0\} \approx 0$
-

## Rozdział 5

# Analiza dokładności nowych metod IpDFT wykorzystujących okna czasowe GMSD

### 5.1 Wprowadzenie do rozdziału

Weryfikacja poprawności uzyskanych formuł interpolacyjnych, wraz z oceną ich skuteczności, jest realizowana w dalszej części rozprawy z wykorzystaniem badań symulacyjnych. Ewaluacja przeprowadzona jest z użyciem analizy błędów systematycznych, błędów wynikających z obecności zakłóceń losowych oraz błędów losowych dla metod wykorzystujących okna GMSD: dwupunktowej 2pGMSD, trzypunktowej 3pGMSD oraz pięciopunktowej 5pGMSD. Dodatkowo zamieszczony został opis eksperymentu demonstrującego możliwość zastosowania metody pięciopunktowej w celu usunięcia wpływu składowych harmonicznych niskiego rzędu w warunkach praktycznego pomiaru. Ocenie efektywności wprowadzanych metod towarzyszy porównanie z innymi metodami referencyjnymi, które wykorzystują bezpośrednią formułę interpolacyjną.

W pierwszej kolejności przedstawione zostały charakterystyki błędu średniokwadratowego metody dwupunktowej 2pGMSD w przypadku estymacji częstotliwości pojedynczej oscylacji zespolonej. Przeprowadzone zostały badania symulacyjne dla wariantu sygnału bez szumu w celu oceny obciążenia estymatora oraz w obecności szumu dla oceny błędu całkowitego. Przeprowadzona została analiza dotycząca wpływu wyboru parametrów metody na uzyskiwany błąd. Ewaluacja metody dwupunktowej rozszerzona jest także do przypadku zastosowania jej w estymacji rzeczywistego sygnału sinusoidalnego (obecność składowej sprzężonej), w tym dla krótkich czasów pomiaru. Zbadany został także wpływ bliskich składowych harmonicznych na wynik pomiaru. Scenariusze przeprowadzonych symulacji są powtarzane także dla metody trzypunktowej 3pGMSD oraz pięciopunktowej 5pGMSD. W przypadku metody trzypunktowej, która wprowadza eliminację wpływu składowej sprzężonej, ocena efektywności metody rozpoczyna się od pomiarów przeprowadzonych dla rzeczywistego sygnału sinusoidalnego. Ewaluacja metody pięciopunktowej rozpoczyna się od estymacji częstotliwości sygnału zawierającego składową sinusoidalną i jedną harmoniczną. W symulacjach prezentowane są charakterystyki dla wariantu tej metody z eliminacją drugiej harmonicznej oraz wariantu z eliminacją trzeciej harmonicznej.

## 5.2 Kryterium oceny estymatorów

### Błąd średniokwadratowy RMSE

Jakość estymatora może być oceniona z wykorzystaniem średniokwadratowego błędu RMSE (ang. *root mean square error*), będącego miarą błędu całkowitego, wynikającego zarówno z obciążenia estymatora jak i jego wariancji. W ogólności błąd jest określony przez pierwiastek kwadratowy z wariancji i kwadratu obciążenia estymatora  $\hat{\delta}$ :

$$RMSE = \sqrt{\text{Var}[\hat{\delta}] + E[\hat{\delta}]^2} \quad (5.1)$$

Niezerowa wartość wariancji estymatora  $\sigma_e^2 = \text{Var}[\hat{\delta}]$  spowodowana jest obecnością szumu  $s(n)$  w sygnale (2.1) i jej minimalna wartość jest określona przez ograniczenie Craméra-Rao. Dla części z prezentowanych w rozdziale 3 metod interpolacji widma zostały określone zależności analityczne dla wariancji [13], [15], [24], [58], [133], [145]. Wyrażenie dla uogólnionego estymatora IpDFT wykorzystującego nawet do  $N$  prążków DFT i okien z bazą kosinusową zostało zaproponowane przez Belegę i Petriego [25]. W badaniach symulacyjnych przeprowadzonych w niniejszym rozdziale błąd RMSE dla częstotliwości  $\lambda_0$  jest estymowany dla  $R$  realizacji w następujący sposób:

$$RMSE(\lambda_{0est}) = \sqrt{\frac{1}{R} \sum_{r=1}^R (\lambda_{0est}^{(r)} - \lambda_0)^2} \quad (5.2)$$

gdzie estymowana wartość częstotliwości podstawowej  $\lambda_{0est}^{(r)}$  otrzymywana jest z  $r$ -tej realizacji zmiennej losowej.

Zastosowanie miary błędu RMSE w przeprowadzonych analizach pozwala na oszacowanie błędu całkowitego uzyskanych estymatorów w przypadku występowania szumu. Z perspektywy błędów wynikających z obecności zakłóceń deterministycznych (inne składowe w sygnale) i błędu systematycznego metody, użycie tego narzędzia pozwala także na uwzględnienie wpływu różnych zestawień wartości fazy wielu składowych sygnału wejściowego jednocześnie, traktując wartość fazy każdej składowej jako zmienną losową o rozkładzie jednostajnym. Ze względu na to, że badane estymatory IpDFT wykorzystują wartości zespolone DFT, które zależą od wartości fazy składowych obecnych w sygnale, ważne jest przebadanie kombinacji wartości fazy w całym zakresie tego parametru. Inne podejścia, takie jak użycie charakterystyk błędu maksymalnego, charakteryzują się wykładniczym wzrostem złożoności obliczeniowej wraz ze wzrostem liczby rozważanych składowych. Stąd analiza błędu polegająca na wyszukiwaniu przypadku najgorszej fazy, dla większej liczby składowych sinusoidalnych obecnych w sygnale, staje się w praktyce trudna do przeprowadzenia. Niewątpliwą zaletą wykorzystania charakterystyk błędu RMSE jest możliwość ujednolicenia większości wykresów do jednej miary błędu w całym rozdziale.

### Wpływ poziomu SNR na błąd estymatora

W ogólności dokładność estymatora może być rozpatrywana ze względu na dwa przedziały wartości współczynnika SNR. Gdy SNR przyjmuje małe wartości (wysoki poziom szumu), wariancja  $\sigma_e^2$  jest składnikiem dominującym wobec kwadratu obciążenia  $E[\hat{\delta}]$  i uzyskiwany kształt charakterystyki RMSE estymatora silnie zależy od wartości SNR. Odrotnie, w sytuacji gdy SNR jest wysokie, to obciążenie stanowi składnik dominujący



wobec wariancji, co powoduje, że uzyskanie lepszego stosunku SNR nie polepsza w znaczącym stopniu dokładności pomiaru i głównym źródłem błędów stają się błędy wynikające z obecności składowych zakłócających oraz błąd systematyczny związany z przyjętymi aproksymacjami przy wprowadzeniu metod.

Uzyskanie estymatora odpowiedniego dla danego zastosowania wiąże się z ustaleniem kompromisu pomiędzy ograniczaniem obciążenia a maksymalizacją odporności na szum, gdyż często są to cele sprzeczne ze sobą. Pojawienie się w sygnale zakłóceń w postaci innych składowych częstotliwościowych, które nie są uwzględnione w interpolacji, wiąże się ze wzrostem obciążenia estymatora. Do tej kategorii zalicza się wpływ składowej sprzężonej i składowych harmonicznyc. W zależności od poziomu zaszumienia, nacisk na wybór źródła błędów do redukcji może ulegać zmianie. Estymatory wprowadzone w niniejszej rozprawie wykorzystują techniki eliminacji obciążenia wynikającego z obecności innych składowych niż składowa podstawowa w sygnale i najlepiej sprawdzają się dla sygnałów o małym poziomie zaszumienia. W przypadku niskich wartości współczynnika SNR zastosowanie prostszych formuł, wraz z oknem prostokątnym, może potencjalnie pozwolić na otrzymanie mniejszego błędów całkowitego, ze względu na mniejszą wariancję. Warto jednak podkreślić, że np. w przypadku estymatorów eliminujących wpływ składowej sprzężonej, metoda trzypunktowa nadal charakteryzuje się jednym z lepszych poziomów odporności na szum, gdy zastosowane zostaje okno prostokątne, tj. parametr okna GMSD  $p = 0$ .

### Parametry metod wykorzystujących okna GMSD i parametry symulacji

Parametry  $a$  i  $b$  formuły pięciopunktowej (4.76) określają krotności częstotliwości unormowanej  $\lambda_0$  dla dwóch rzeczywistych składowych sinusoidalnych, które mają zostać uwzględnione w modelu. W badaniach symulacyjnych przeprowadzonych w niniejszym rozdziale przyjmowane są wyłącznie dwie kombinacje wartości tych parametrów:  $a = 1$  i  $b = 2$  w celu eliminacji wpływu drugiej harmonicznej oraz  $a = 1$  i  $b = 3$  w celu eliminacji wpływu trzeciej harmonicznej.

Parametr  $k$  oznacza indeks prążka DFT wybranego jako wartość środkowa w metodach trzypunktowej i pięciopunktowej oraz prążek pierwszy lub drugi dla metody dwupunktowej, w zależności od wybranej formuły (4.14) lub (4.15). Domyślnie w symulacjach wybierany jest prążek leżący najbliżej estymowanej wartości  $\lambda_0$  z rozdzielczością  $\Delta\lambda = 0,5$  bin. Rozdzielczość 0,5 bin jest możliwa do uzyskania za pomocą wykorzystania techniki uzupełniania zerami do  $2N$  próbek[37].

Kolejnym istotnym parametrem metody jest parametr  $p$  określający postać okna czasowego z rodziny GMSD (równanie (3.20)), który może przyjąć wartości całkowite nieujemne. Zwiększenie wartości parametru wiąże się z rozszerzeniem listka głównego charakterystyki częstotliwościowej okna czasowego, jednocześnie zawężając okno dla przebiegu czasowego. Większa wartość parametru wiąże się z redukcją wpływu składowych oddalonych oraz redukuje obciążenie estymatora. Z drugiej jednak strony pogarsza własności statystyczne zastosowanej formuły (zwiększona wariancja estymatora). Wybór kompromisu uwzględniającego oba czynniki polega na określeniu, które źródło błędów jest dominujące. Standardowym wyborem w symulacjach opisywanych w niniejszym rozdziale jest  $p = 3$ [56].

Liczba próbek sygnału wykorzystana do obliczenia wartości DFT oznaczona jest symbolem  $N$ . Liczba próbek przyjmowana w symulacjach stanowi wyłącznie potęgę dwójki. Jest to spowodowane faktem, że w praktycznych zastosowaniach wykorzystywany jest al-

gorytm szybkiej transformacji Fouriera FFT.

Parametr symulacji mówiący o liczbie realizacji w równaniu (5.2) oznaczony jest symbolem  $R$ . Jeżeli nie sprecyzowano inaczej, każdy punkt charakterystyki błędu RMSE otrzymywany jest używając  $R = 10^5$  realizacji szumu AWGN, a więc składnika  $s(n)$  z równania (2.1). W większości przypadków zwiększenie liczby iteracji ponad  $10^4$  nie przynosi widocznej poprawy otrzymywanych charakterystyk błędu dla przyjętej rozdzielczości wykresów.

Fazy kolejnych składowych sinusoidalnych oznaczone są jako  $\varphi_h$  w równaniu (3.1). Dla każdej ze składowych sinusoidalnych  $h$  w danej realizacji  $r$  niezależnie losowana jest wartość fazy z rozkładu jednostajnego na odcinku  $[0, 2\pi]$ . Wartości amplitud składowych  $A_h$  (równanie (3.1)) zawsze podawane są dla założenia, że amplituda składowej podstawowej  $A_1=1$ .

Podążając za konwencją wprowadzoną w poprzednich rozdziałach, wprowadzono rozróżnienie pomiędzy częstotliwością podstawową  $\lambda_0$  a częstotliwością pierwszej składowej  $\lambda_1 = 1\lambda_0$  ( $h = 1$ ). Wynika to z faktu, że dla metody pięciopunktowej GMSD możliwe jest użycie parametrów  $a, b$  innych niż wartość 1. Wtedy częstotliwości składowych uwzględnianych w estymacji wynoszą kolejno  $a\lambda_0, b\lambda_0$ , a wartość  $\lambda_1$  jest nieużywana.

## 5.3 Metoda dwupunktowa dla okien GMSD

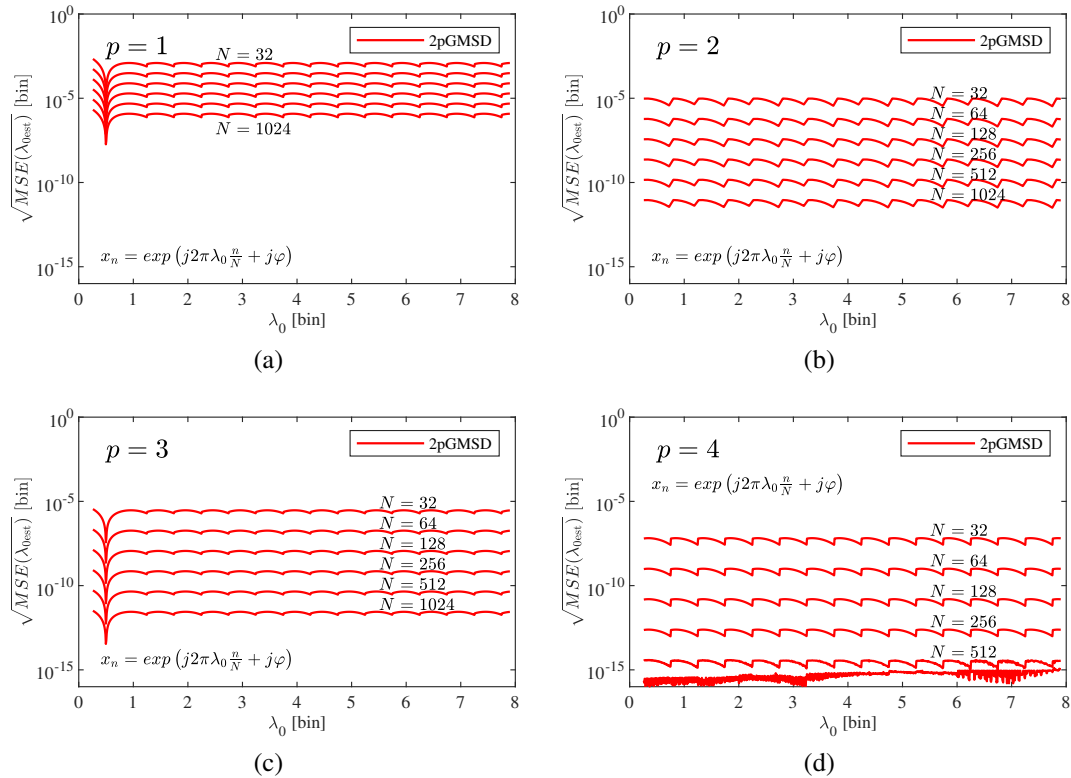
### 5.3.1 Estymacja częstotliwości dla pojedynczej oscylacji zespolonej

Metoda dwupunktowa wprowadzona w niniejszej rozprawie korzysta z formuły (4.14) dla dwóch kolejnych prążków  $X_{k-1}$  i  $X_k$  lub formuły (4.15) wykorzystującej dwa punkty  $X_k$  i  $X_{k+1}$ . W praktyce wyniki uzyskiwane z użyciem obu formuł są identyczne, a wybór formuły ma znaczenie jedynie ze względu na to, które prążki DFT są wykorzystywane w estymacji. Można także zauważyć, że zmiana formuły (4.14) na (4.15) jest tożsama z podstawieniem inkrementowanej wartości parametru  $k$ .

Najważniejszą cechą metody jest to, że wykorzystuje w modelu wyłącznie oscylację zespoloną. Dlatego pojawienie się w sygnale większej liczby składowych częstotliwościowych skutkuje wprowadzeniem dodatkowego obciążenia estymatora, zależnego od ich położenia w widmie. Dalej w rozdziale zaprezentowane zostały charakterystyki błędu RMSE pozwalające na ocenę wpływu postaci sygnału wejściowego na dokładność estymacji.

#### Wpływ liczby próbek $N$ na wartość obciążenia estymatora

W pierwszej kolejności rozpatrywany jest sygnał zawierający pojedynczą oscylację zespoloną i pozbawiony szumu. Umożliwia to zbadanie błędu związanego z obciążeniem estymatora 2pGMSD, ze względu na przyjęte parametry metody. Na rysunku 5.1 przedstawione zostały wykresy charakterystyk błędu RMSE w funkcji częstotliwości podstawowej  $\lambda_0$ , dzięki którym możliwa jest ocena wpływu wyboru liczby użytych próbek  $N$  służących do obliczenia widma DFT na dokładność pomiaru. W badaniach zastosowano wartości  $N$  kolejnych potęg dwójki od  $N = 32$  do  $N = 1024$ . Dla charakterystyk błędu uzyskanych dla czterech wybranych kolejnych wartości parametru  $p$  można zaobserwować, że wraz ze wzrostem liczby próbek  $N$  następuje znaczące zredukowanie wartości błędu wynikającego z obciążenia estymatora, nawet poniżej  $10^{-5}$  bin dla  $p > 2$ . Zysk z zastosowania większej liczby próbek  $N$  rośnie wraz z zastosowaniem większej wartości parametru  $p$ , o czym świadczą rosnące odległości pomiędzy charakterystykami błędu na wykresach od

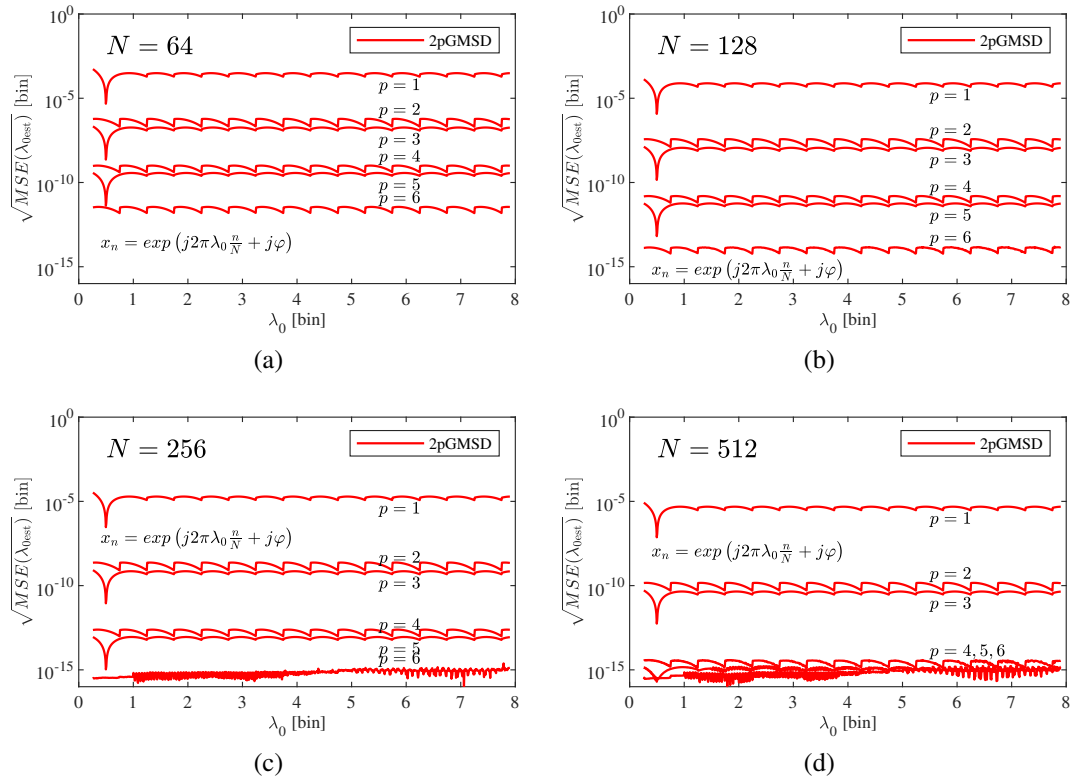


Rysunek 5.1. Charakterystyki błędu RMSE estymatora 2pGMSD przedstawione dla zmieniającej się częstotliwości podstawowej  $\lambda_0$  w przypadku sygnału złożonego z **pojedynczej składowej zespolonej**. Na rysunkach pokazano wpływ liczby próbek  $N$  sygnału na obciążenie estymatora dla czterech wybranych wartości parametru  $p$  okna GMSD.

5.1a do 5.1d. Dla parametru  $p = 3$  błąd RMSE jest mniejszy od  $10^{-5}$  bin dla wszystkich badanych wartości  $N$ , zaś dla wartości  $N > 512$  zmniejsza się poniżej wartości  $10^{-10}$  bin. Na rysunku 5.1d charakterystyka związana z wartością  $N = 1024$  przyjmuje odmienny kształt ze względu na ograniczenia dokładności związane z wykorzystywaną arytmetyką zmiennoprzecinkową.

### Wpływ parametru $p$ okna na obciążenie estymatora

Charakterystyki błędu umieszczone na rysunku 5.1 umożliwiają łatwą ocenę zmiany wartości liczby próbek  $N$  na dokładność estymacji dla ustalonej wartości parametru  $p$  okna czasowego. W celu oceny wpływu wartości  $p$  na dokładność estymacji dla ustalonej liczby próbek  $N$  zestawiono charakterystyki błędu RMSE na rysunku 5.2. W badaniach zastosowano wartości parametru  $p$  dla rosnących wartości od  $p = 1$  do  $p = 6$ . Zestawienie charakterystyk uzyskanych dla czterech wybranych wartości liczby próbek  $N$  sygnału pozwala stwierdzić, że wraz ze wzrostem wartości parametru  $p$  następuje znaczące zredukowanie błędu wynikającego z obciążenia estymatora, w szczególności dla zmiany wartości parametru  $p$  z nieparzystej na parzystą, przy zmianie wartości o jeden. Różnica w błędzie przy okazji przejścia odwrotnego (z wartości parzystej na nieparzystą przy inkrementacji) jest znacząco mniejsza. Tak samo jak dla przypadku charakterystyk znajdujących się na rysunku 5.1, zysk z zastosowania większej liczby próbek  $N$  ma największe znaczenie z większymi wartościami parametru  $p$  (wykresy od 5.2a do 5.2d). Dla  $N = 512$  błąd RMSE jest mniejszy niż  $10^{-5}$  bin dla wszystkich badanych wartości parametru  $p$  okna czasowe-



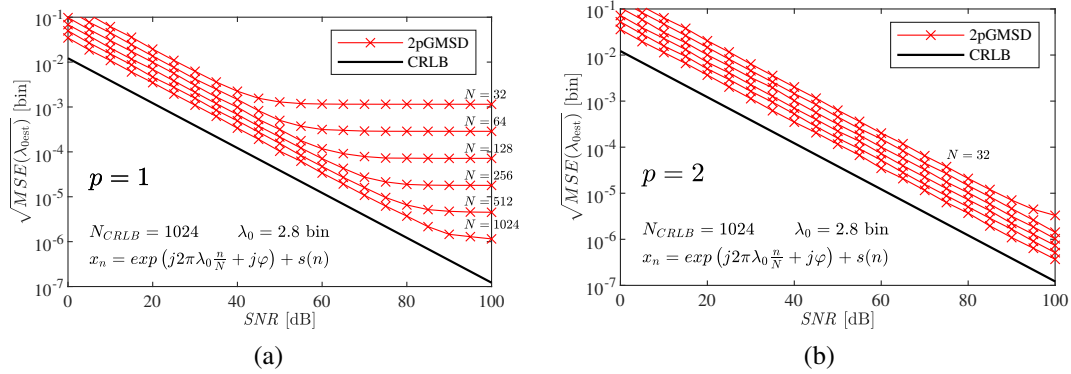
Rysunek 5.2. Charakterystyki błędu RMSE estymatora 2pGMSD przedstawione dla zmieniającej się częstotliwości podstawowej  $\lambda_0$  w przypadku sygnału złożonego z **pojedynczej składowej zespolonej**. Na rysunkach pokazano wpływ parametru  $p$  na obciążenie estymatora dla czterech wybranych wartości liczby próbek  $N$  sygnału.

go. To samo można powiedzieć o charakterystykach błędu dla wartości parametru okna wynoszącego co najmniej  $p = 2$ . Na rysunkach 5.2c i 5.2d charakterystyki związane z większymi wartościami parametru  $p = 4, 5, 6$  przyjmują odmienny kształt ze względu na ograniczoną dokładność obliczeń zastosowanych w symulacjach, tak samo jak w przypadku charakterystyki  $N = 1024$  znajdującej się na wykresie 5.1d.

### Wpływ zakłóceń losowych na dokładność metody dwupunktowej

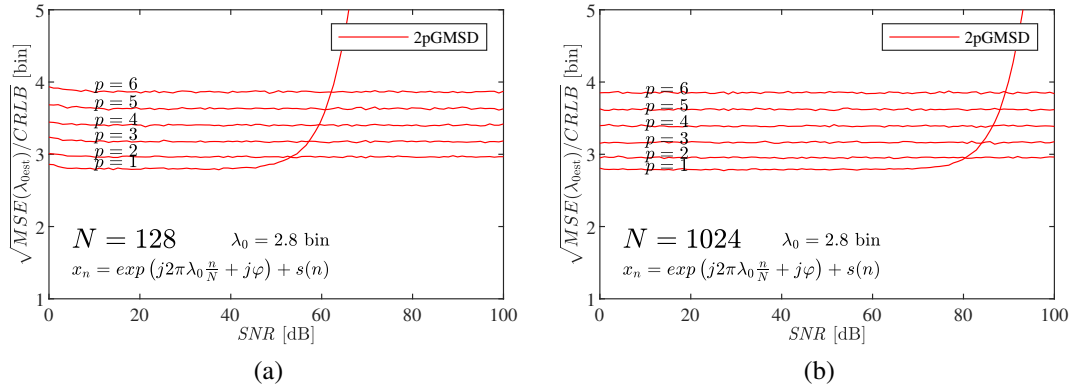
W celu dokonania oceny odporności na zakłócenia losowe badanego estymatora wykorzystano sygnał złożony z pojedynczej oscylacji zespolonej zniekształconej szumem. Obecność szumu w sygnale wejściowym powoduje, że uzyskiwana wartość błędu średniokwadratowego wzrasta ze względu na niezerową wartość wariancji używanego estymatora (zależność (5.1)). Szum wykorzystywany w symulacjach to szum AWGN charakteryzujący się zerową wartością oczekiwaną i wariancją uzależnioną od wartości przyjętego poziomu współczynnika SNR.

Na rysunku 5.3 zostały przedstawione charakterystyki błędu RMSE w funkcji wartości SNR w przedziale  $[0, 100]$  dB. Wykorzystywana jest przy tym stała wartość częstotliwości podstawowej  $\lambda_0$  wynosząca 2,8 bin. Na wykresach zostały przedstawione charakterystyki błędu dla kolejnych wartości liczby próbek sygnału, od wartości  $N = 32$  do  $N = 1024$ , z wykorzystaniem parametrów okna  $p = 1$  na wykresie 5.3a oraz  $p = 2$  na wykresie 5.3b. Wartości błędu znajdujące się na wykresie 5.3a dla parametru  $p = 1$  można wyraźnie podzielić ze względu na obszary dominacji wariancji oraz dominacji obciążenia estymatora



Rysunek 5.3. Błąd RMSE przedstawiony w funkcji wartości SNR dla kolejnych wartości liczby próbek  $N$  sygnału. Na rysunkach zostały przedstawione charakterystyki dla dwóch parametrów okna  $p = 1$  oraz  $p = 2$ .

w ujęciu błędu całkowitego dla różnych zakresów wartości współczynnika SNR. Pierwszy charakteryzuje się tym, że linie wyznaczające błąd RMSE biegną równolegle do linii oznaczającej ograniczenie Craméra-Rao. W tym regionie panuje dominacja błędu związanego z wariancją estymatora nad obciążeniem. Dla charakterystyki  $N = 32$  ten region kończy się przy wartości  $SNR = 50$  dB, gdzie następuje przegięcie wykresu i zaczyna dominować obciążenie estymatora. Z kolei dla charakterystyki  $N = 1024$  punkt ten leży dla  $SNR \approx 90$  dB. Otrzymane wartości błędów są zgodne z wynikami otrzymanymi dla rysunków przedstawiających błędy dla przypadku estymacji składowej zespolonej bez zniekształceń losowych. Na drugim wykresie 5.3b, dla parametru  $p = 2$ , zostały przedstawione charakterystyki, dla których w całym badanym zakresie wartości SNR dominuje błąd związany z wariancją estymatora, z wyjątkiem charakterystyki dla przypadku  $N = 32$ . Tak jak w przypadku wykresu 5.3a, poziomy błąd RMSE widoczny na wykresie 5.3b, dla którego charakterystyka przechodzi w rejon z dominacją błędów obciążenia, zgadza się z poziomymi wartościami błędów uzyskanymi na wykresach 5.1 oraz 5.2 w przypadku sygnału niezakłóconego szumem.



Rysunek 5.4. Błąd RMSE odniesiony do ograniczenia Craméra-Rao w funkcji SNR sygnału dla różnych wartości parametru  $p$  oraz dla dwóch wartości  $N = 128$  oraz  $N = 1024$ . Charakterystyki zostały uzyskane dla stałej wartości częstotliwości podstawowej  $\lambda_0 = 2,8$  bin.

### Charakterystyki błędu RMSE odniesione do ograniczenia Craméra-Rao ze względu na użytą wartość parametru okna

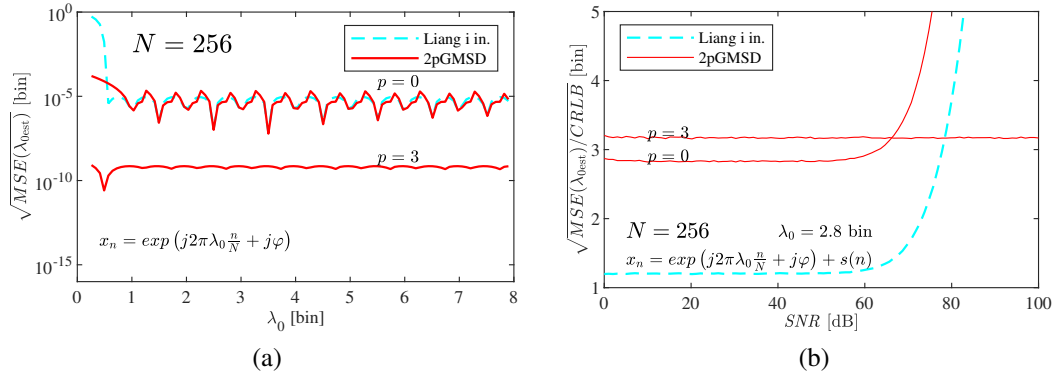
Charakterystyki błędu RMSE z wykorzystaniem różnych parametrów okna czasowego  $p$ , w przypadku dwóch liczb próbek  $N = 128$  i  $N = 1024$ , zostały przedstawione na rysunku 5.4. Wartości błędu na rysunku odniesione są do wartości ograniczenia Craméra-Rao dla rozważanej liczby próbek  $N$ . Pozwala to na uzyskanie informacji ilościowej o wariancji badanego estymatora, co było trudniejsze w przypadku wykresu 5.3, który zawiera bezwzględne wartości błędu przedstawione w skali logarytmicznej. Takie podejście pozwala także na ocenę wpływu wyboru parametru  $p$  na wynik estymacji dla wielu wartości jednocześnie. Tak jak w przypadku wcześniejszego rysunku 5.3, tak i w tej symulacji wykorzystana jest stała częstotliwość  $\lambda_0 = 2,8$  bin dla pojedynczej oscylacji zespolonej.

Oba zestawienia charakterystyk względnych błędu RMSE różnią się od siebie bardzo nieznacznie. Główną różnicę stanowią charakterystyki dla przypadku parametru okna o wartości  $p = 1$ , dla którego zwiększenie liczby próbek  $N$  pozwala na zredukowanie obciążenia będącego czynnikiem przeważającym już dla poziomu  $\text{SNR} \approx 50$  dB i sygnału zawierającego  $N = 128$  próbek. Dla  $N = 1024$  ten punkt przesuwają się do poziomu  $\text{SNR} \approx 80$  dB. Charakterystyki błędu pokazują, że w badanym zakresie wartości SNR współczynniki okna o wartościach większych niż  $p = 1$  gwarantują eliminację obciążenia znacznie poniżej poziomu błędu związanego z wariancją estymatora. Estymator 2pGMSD pozwala na utrzymanie wartości błędu całkowitego poniżej trzykrotności wartości ograniczenia Craméra-Rao nawet dla wartości  $\text{SNR} > 100$  dB dla przypadku zastosowania okna z parametrem  $p = 2$ .

### 5.3.2 Porównanie z wybraną metodą bezpośrednią

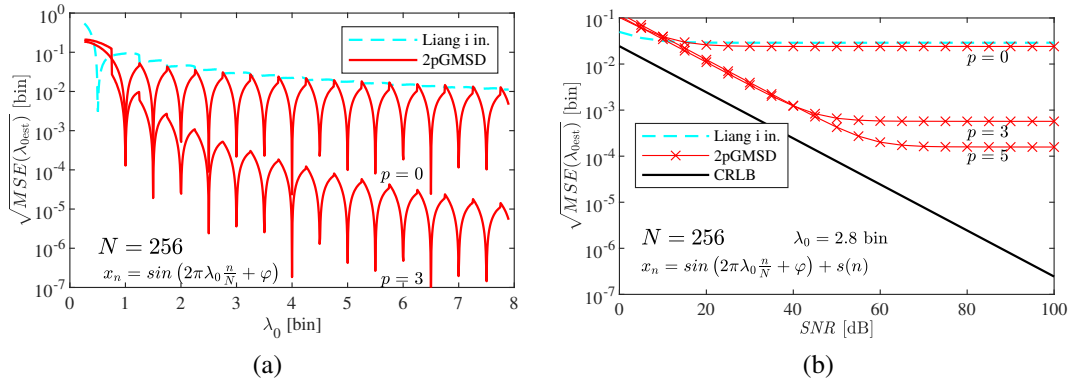
Estymator dwupunktowy 2pGMSD analizowany w niniejszym rozdziale został porównany z inną metodą o zbliżonej charakterystyce. Wybrana została metoda Lianga i in. [113], która charakteryzuje się wysoką odpornością na szum w przypadku estymacji częstotliwości pojedynczej oscylacji zespolonej i oferuje bezpośrednią formułę interpolacyjną.

Rysunek 5.5 jest pierwszym z dwóch rysunków przedstawiających wyniki przeprowadzonych badań w postaci charakterystyk dla metody 2pGMSD i metody Lianga i in. [113].



Rysunek 5.5. Porównanie błędów metody 2pGMSD dla dwóch parametrów okna z metodą Lianga i in. [113].

Badanie zostało przeprowadzone dla sygnału zawierającego wyłącznie jedną oscylację zespoloną. Na wykresie 5.5a zostały przedstawione charakterystyki błędu RMSE dla zmieniającej się wartości częstotliwości podstawowej dla metody Lianga i metody 2pGMSD z dwoma wartościami parametru okna:  $p = 0$  (okno prostokątne) i  $p = 3$ . Wartość liczby próbek wybranych do tej symulacji została ustalona na  $N = 256$ . Okno prostokątne ( $p = 0$  dla metody 2pGMSD) zostało wybrane ze względu na to, że metoda Lianga wykorzystuje wyłącznie takie okno do estymacji. Charakterystyki błędu zostały otrzymane dla przypadku sygnału niezakłóconego szumem, w celu zbadania wartości błędu wynikającego z obciążenia estymatorów. W przypadku zastosowania okna prostokątnego charakterystyka błędu metody [113] jest bardzo zbliżona do charakterystyki błędu metody 2pGMSD w zakresie  $\lambda_0 > 1$ . Ograniczenie obciążenia jest możliwe dla metody 2pGMSD z wyborem  $p > 0$ . Wiąże się to jednak ze zwiększoną wartością wariancji estymatora, co z kolei skutkuje większymi wartościami błędu całkowitego RMSE w przypadku sygnału zakłóconego szumem. Opisany efekt można zaobserwować na wykresie 5.5b, gdzie umieszczone zostały charakterystyki błędu RMSE odniesione do ograniczenia Craméra-Rao, dla liczby próbek  $N = 256$  dla obu metod. Częstotliwość podstawowa, dla której zostały otrzymane charakterystyki błędu, wynosi  $\lambda_0 = 2,8$  bin. Widać wyraźną przewagę metody Lianga dla przedziału SNR < 80 dB. W tym zakresie błąd względny metody Lianga osiąga wartość ok. 1,2 raza wartości ograniczenia Craméra-Rao, gdzie wprowadzany estymator 2pGMSD pozwala jedynie na osiągnięcie rezultatu poniżej 3 razy wartości ograniczenia Craméra-Rao w najlepszym przypadku ( $p = 0$ ). Należy jednak zauważyć, że dla wartości powyżej wspomnianego progu wartości SNR, zaczyna przeważać błąd związany z obciążeniem estymatora dla obu metod w przypadku zastosowania okna prostokątnego. Na wykresie 5.5b jest to widoczne w postaci nagłego wzrostu błędu odniesionego do ograniczenia Craméra-Rao w funkcji zmniejszającego się udziału szumu w całkowitej energii sygnału. Dla większych wartości SNR zastosowanie metody 2pGMSD z większymi wartościami parametru  $p$  umożliwia utrzymanie wartości błędu całkowitego RMSE na podobnym poziomie. Jest to spowodowane redukcją obciążenia znacznie poniżej poziomu błędu wynikającego z występowania zakłóceń losowych, a co za tym idzie charakterystyka błędu pozostaje w przybliżeniu stała. Na wykresie 5.5b jest to widoczne dla przypadku użycia parametru  $p = 3$ , co umożliwia uzyskanie mniejszego błędu całkowitego niż dla metody Lianga i in. [113]. Zysk wynikający z przyjęcia właściwych parametrów metody wykorzystującej okna GMSD wynika przede wszystkim z redukcji obciążenia. Widać to w szczególności, gdy wzrost błędu całkowitego RMSE związany jest z obecnością innych



Rysunek 5.6. Porównanie błędów metody 2pGMSD dla różnych parametrów okna z metodą Lianga i in. [113] w przypadku rzeczywistego sygnału sinusoidalnego.

składowych częstotliwościowych w sygnale.

### 5.3.3 Rzeczywisty sygnał sinusoidalny i wpływ składowej sprzężonej na dokładność estymacji

Kolejne symulacje poświęcone są analizie dokładności pomiaru porównywanych estymatorów w przypadku sygnału złożonego z pojedynczej oscylacji sinusoidalnej. Zmiana modelu sygnału powoduje, że oprócz składnika pochodzącego od składowej podstawowej, pojawia się również składnik przecieku widma pochodzący od składowej sprzężonej położonej w zakresie częstotliwości ujemnych. Obecność tego drugiego składnika staje się istotna dla krótkich czasów pomiaru, tj. niskiej częstotliwości podstawowej  $\lambda_0$  (rozdział 3.6). W przypadku estymatorów uwzględniających wpływ wyłącznie składowej podstawowej w modelu, obecność składowej sprzężonej staje się źródłem zwiększonej wartości obciążenia estymatora.

Na rysunku 5.6 zostały przedstawione wyniki badań przeprowadzonych dla sygnału złożonego z jednej składowej sinusoidalnej zakłóconej szumem. Omawiane wykresy odpowiadają tym uzyskanym na rysunku 5.5, dla sygnału złożonego z pojedynczej oscylacji zespolonej (z wyjątkiem wykresu 5.6b, gdzie zrezygnowano z przedstawienia wartości odniesionych do ograniczenia Craméra-Rao, ze względu na dominujący charakter obciążenia w błędzie całkowitym RMSE). Zachowane zostały także parametry sygnału i pomiaru z poprzedniej symulacji. Na wykresie 5.6b umieszczono dodatkową charakterystykę dla parametru  $p = 5$  okna czasowego.

Obecność składowej sprzężonej w sygnale powoduje, że charakterystyka błędu metody Lianga i in. [113] wykazuje większy błąd RMSE dla badanego zakresu  $\lambda_0 \in [1, 8]$  bin, nawet w przypadku charakterystyki związanej z oknem prostokątnym ( $p = 0$ ) przyjętym dla metody 2pGMSD (wykres 5.6a). Z kolei zastosowanie okna o parametrze  $p = 3$  pozwala na znaczące zredukowanie wpływu składowej sprzężonej na wynik pomiaru dla rosnących wartości częstotliwości podstawowej  $\lambda_0$ , ze względu na redukcję poziomu listków bocznych okien GMSD. Na drugim wykresie 5.6b zostały pokazane charakterystyki błędów RMSE dla przypadku sygnału zakłóconego szumem dla jednej ustalonej wartości częstotliwości  $\lambda_0 = 2,8$  bin. Widać na nim, że błąd wynikający z obciążenia estymatorów staje się składnikiem dominującym już dla wartości SNR  $> 10$  dB w przypadku użycia okna prostokątnego. Zastosowanie okien GMSD o większych wartościach parametru  $p$  powodu-



je redukcję obciążenia estymatora 2pGMSD i co za tym idzie wspomniany próg wartości SNR przesuwa się w kierunku większych wartości, polepszając całkowitą dokładność estymatora w przypadku pomiaru częstotliwości rzeczywistego sygnału sinusoidalnego.

### 5.3.4 Rzeczywisty sygnał sinusoidalny zakłócony harmonicznymi

#### Wpływ obecności w sygnale drugiej składowej harmonicznej

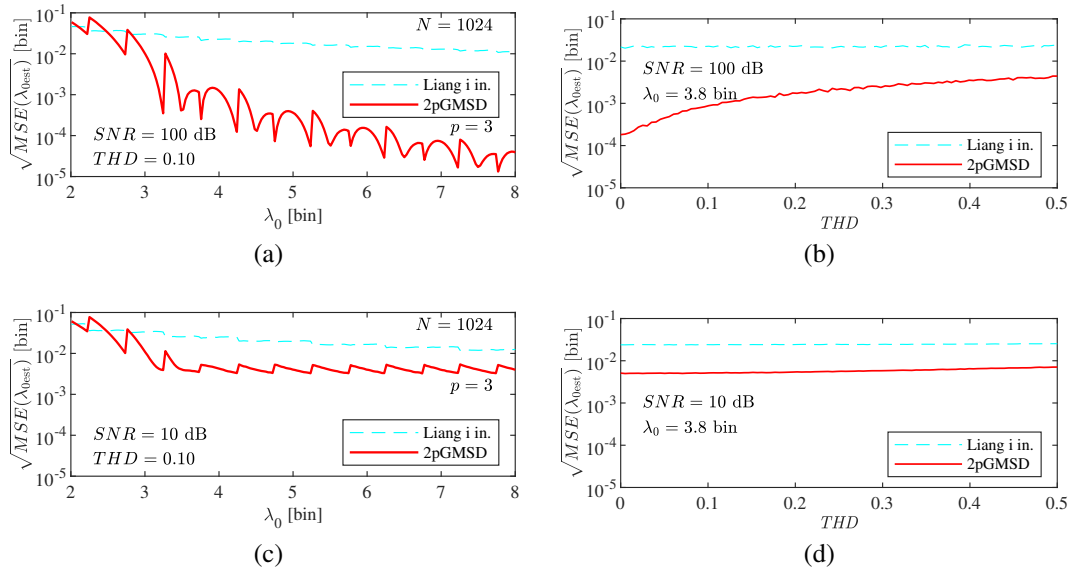
Obecność w sygnale zakłóceń w postaci składowych harmonicznymi wiąże się z dalszym wzrostem obciążenia porównywanych estymatorów uwzględniających w modelu wyłącznie pojedynczą oscylację zespoloną. Jest to spowodowane rosnącym, sumarycznym składnikiem przecieku widma, który pochodzi od blisko położonych składowych harmonicznymi, tak jak zostało to opisane w rozdziale 3.7.2. W celu zbadania wpływu obecności bliskich komponentów częstotliwościowych na dokładność estymatora 2pGMSD zostały przeprowadzone badania dla przypadku sygnałów zakłóconych harmonicznymi.

Na rysunku 5.7 zostały przedstawione wyniki badań dla rzeczywistego sygnału sinusoidalnego zakłóconego składową harmoniczną drugiego rzędu o amplitudzie stanowiącej 10% amplitudy składowej podstawowej, ze zmieniającą się częstotliwością podstawową  $\lambda_0$  na rysunkach 5.7a i 5.7c oraz ze stałą wartością  $\lambda_0 = 3.8$  bin i zmieniającą się wartością amplitudy drugiej harmonicznej na rysunkach 5.7b i 5.7d. Symulacje zostały przeprowadzone dla dwóch poziomów zaszumienia, mając na uwadze mocne strony porównywanych estymatorów: sygnał z wysokim poziomem szumu (SNR = 10 dB), dla którego lepsze wyniki osiągał estymator Lianga i in. [113] i niskim poziomem szumu SNR = 100 dB, dla którego z kolei lepsze wyniki osiągał estymator 2pGMSD. Charakterystyki błędu RMSE zostały uzyskane dla  $N = 1024$  dla obu porównywanych metod, gdzie dla metody 2pGMSD został wykorzystany współczynnik  $p = 3$ . Wykresy po lewej stronie 5.7a i 5.7c pokazują charakterystyki błędu w funkcji częstotliwości podstawowej  $\lambda_0$ . Po prawej stronie rysunku znajdują się wykresy 5.7b i 5.7d, na których znajdują się charakterystyki dla wybranej częstotliwości  $\lambda_0 = 3,8$  bin i rosnącej amplitudy drugiej harmonicznej (wyrażonej przez współczynnik THD). Współczynnik THD dla  $H - 1$  kolejnych składowych harmonicznymi zdefiniowany jest w następujący sposób:

$$\text{THD} = \sqrt{\sum_{h=2}^H \frac{A_h^2}{A_1^2}} \quad (5.3)$$

Z powyższego równania wynika, że dla pojedynczej składowej harmonicznej rzędu  $h$  występującej w sygnale zachodzi zależność  $\text{THD} = \frac{|A_h|}{|A_1|}$ .

W przypadku niskiego poziomu zaszumienia, użycie estymatora 2pGMSD skutkuje uzyskaniem charakterystyki błędu o malejących wartościach dla zwiększającej się wartości częstotliwości  $\lambda_0$ . Szybkość opadania charakterystyki RMSE na wykresie 5.7a jest znacząco większa niż dla estymatora Lianga i in. [113] – zaczynając od podobnej wartości błędu dla  $\lambda_0 = 2$  bin, aż do zmniejszenia się wartości błędu o dwa rzędy wielkości przy  $\lambda_0 = 7$  bin. Charakterystyki na wykresie 5.7b pokazują dynamikę zmiany błędu dla zwiększającego się udziału drugiej harmonicznej w sygnale przy stałej częstotliwości  $\lambda_0 = 3,8$  bin. Można zauważyć, że w całym zakresie wartości  $\lambda_0$  oraz wartości współczynnika THD metoda 2pGMSD osiąga lepsze rezultaty od metody Lianga, choć różnica w błędzie dla większych wartości THD zmniejsza się. Stała wartość błędu, bez względu na wartość amplitudy harmonicznej dla metody Lianga wynika z dominacji błędu wynikającego z obecności składowej sprzężonej. Tak jak wnioskowano w przypadku poprzednich



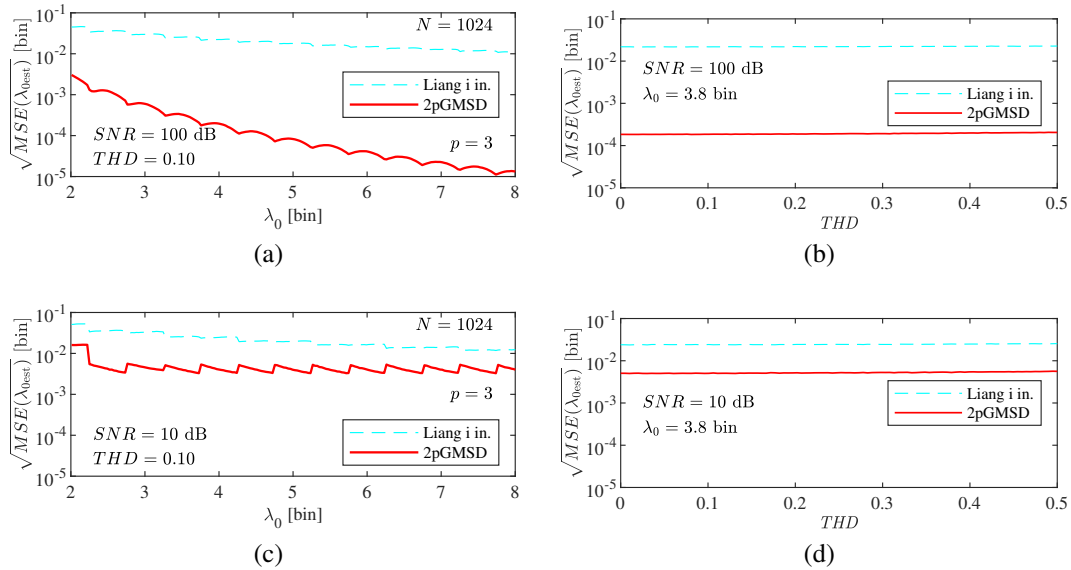
Rysunek 5.7. Porównanie błędów metody 2pGMSD dla różnych parametrów okna z metodą Lianga i in. [113] w przypadku rzeczywistego sygnału sinusoidalnego zakłóconego drugą harmoniczną dla wybranej częstotliwości  $\lambda_0 = 3,8$  bin. Rozpatrywane są dwa przypadki: dla wykresów (a) i (b) wykorzystywany jest sygnał z niskim poziomem zaszumienia ( $SNR=100$  dB), z kolei dla wykresów (c) i (d) z wysokim poziomem zaszumienia ( $SNR=10$  dB).

badania symulacyjnych (rysunek 5.6), możliwość zastosowania okien GMSD pozwala na zmniejszenie obciążenia estymatora wynikającego z występowania składowych sąsiadujących.

W przypadku wysokiego poziomu zaszumienia sygnału ( $SNR = 10$  dB) różnica w dokładności zastosowanych estymatorów zmniejsza się, ale pozostaje na korzyść metody 2pGMSD z parametrem  $p = 3$ . Wykresy 5.7c i 5.7d pokazują charakterystyki błędu RMSE przyjmujące w przybliżeniu stałe wartości (w obszarze  $\lambda_0 > 3$  bin).

### Wpływ obecności w sygnale trzeciej harmonicznej

Na rysunku 5.8 zostały przedstawione wyniki badań przeprowadzonych dla przypadku sygnału składającego się ze składowej sinusoidalnej zakłóconej harmoniczną trzeciego rzędu. Powtórzony został scenariusz z badań przeprowadzonych dla składowej harmonicznej rzędu drugiego (rysunek 5.7). Dla przypadku sygnału z niskim poziomem zaszumienia ( $SNR = 100$  dB) wpływ trzeciej harmonicznej na wyniki estymacji 2pGMSD jest znacząco mniejszy niż to było w przypadku charakterystyki widocznej na wykresie 5.7a, tj. obecności drugiej harmonicznej. Charakterystyka błędu przedstawiona na wykresie 5.8a przyjmuje bardziej regularny kształt w porównaniu z przypadkiem obecności drugiej harmonicznej, zaś wartość błędu zmniejsza się – przykładowo z poziomu  $10^{-3}$  bin w przypadku obecności drugiej harmonicznej do  $10^{-4}$  bin w przypadku obecności trzeciej harmonicznej dla  $\lambda_0 = 4$  bin. Z kolei dokładność metody Lianga i in. [113] nie poprawia się zauważalnie, zachowując błąd rzędu  $10^{-2}$  bin, tak samo jak dla przypadku charakterystyki błędu widocznej na wykresie 5.7a. Na wykresie 5.8b, demonstrującym wpływ amplitudy harmonicznej dla częstotliwości  $\lambda_0 = 3,8$  bin, charakterystyki błędu RMSE przyjmują w przybliżeniu stałe wartości dla całego zakresu wartości współczynnika THD. Oznacza

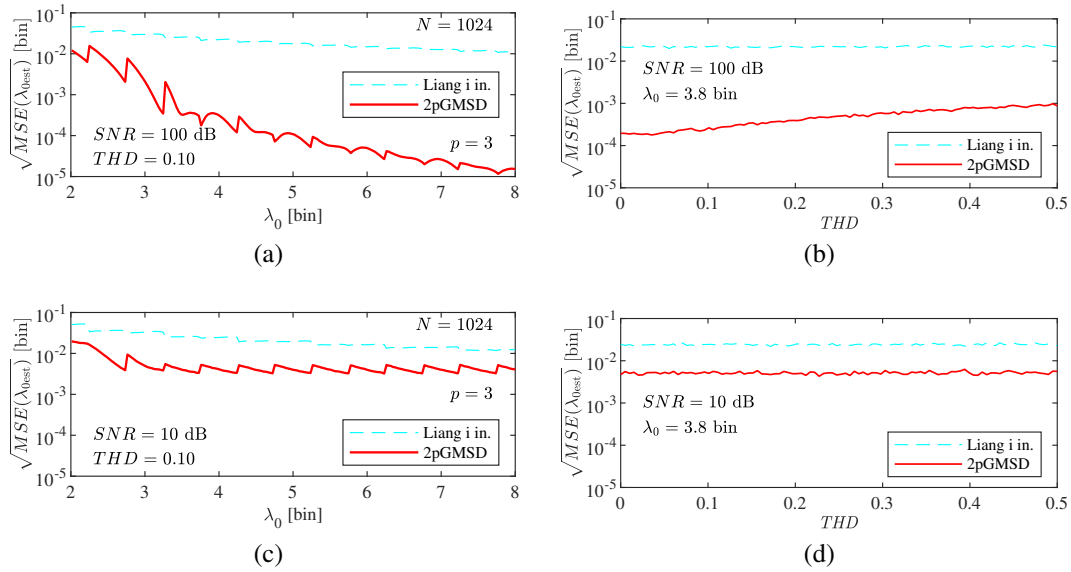


Rysunek 5.8. Porównanie błędów metody 2pGMSD dla różnych parametrów okna z metodą Lianga i in. [113] w przypadku rzeczywistego sygnału sinusoidalnego zakłóconego **trzecią harmoniczną** dla wybranej częstotliwości  $\lambda_0 = 3,8$  bin. Rozpatrywane są dwa przypadki: dla wykresów (a) i (b) wykorzystywany jest sygnał z niskim poziomem zaszumienia ( $SNR=100$  dB), z kolei dla wykresów (c) i (d) z wysokim poziomem zaszumienia ( $SNR=10$  dB).

to, że w tym przypadku błąd wynikający z obecności składowej sprzężonej dominuje nad błędem wynikającym z obecności trzeciej harmonicznej dla obu metod, nawet przy maksymalnej wartości rozważanej amplitudy  $A_3 = 0,5$ . Dla przypadku sygnału z dużym poziomem zaszumienia ( $SNR = 10$  dB) wykresy 5.8c i 5.8d pokazują, że dla całego zakresu  $\lambda_0$  i całego zakresu wartości współczynnika THD, w przypadku metody Lianga, nadal dominuje błąd związany z obecnością składowej sprzężonej. Dla metody 2pGMSD sytuacja jest zupełnie odwrotna: dla wskazanych zakresów parametrów dominuje błąd związany z wariancją estymatora. Dla wszystkich przypadków jest on mniejszy niż całkowity błąd wynikający z zastosowania metody Lianga.

### Wpływu obecności w sygnale wielu składowych harmonicznyc

W praktycznych zastosowaniach w sygnale występuje zwykle wiele harmonicznyc. Na rysunku 5.9 zostały przedstawione wyniki badań przeprowadzonych dla przypadku estymacji częstotliwości podstawowej sygnału składającego się ze składowej sinusoidalnej zakłóconej ośmioma kolejnymi składowymi harmonicznymi, ze stosunkiem amplitud opisanym w tabeli 5.1. Powtórzony został scenariusz obu wcześniejszych badań przeprowadzonych dla obecności pojedynczych harmonicznyc niskiego rzędu, tj. wyników z rysunków 5.8 i 5.9. Dla przypadku sygnału z niskim poziomem zaszumienia ( $SNR = 100$  dB) sumaryczny wpływ harmonicznyc na wyniki estymacji metody dwupunktowej można ocenić uwzględniając wyniki umieszczone na rysunku 5.9a. Kształt charakterystyk błędu RMSE jest zbliżony do charakterystyk dla przypadku drugiej harmonicznej obecnej w sygnale (rysunek 5.7), bezwzględne wartości błędu są jednak mniejsze. Świadczy to o tym, że największym składnikiem obciążenia estymatora 2pGMSD jest przeciek widma pochodzący od drugiej harmonicznej, czyli składowej położonej najbliższej używanych w interpolacji



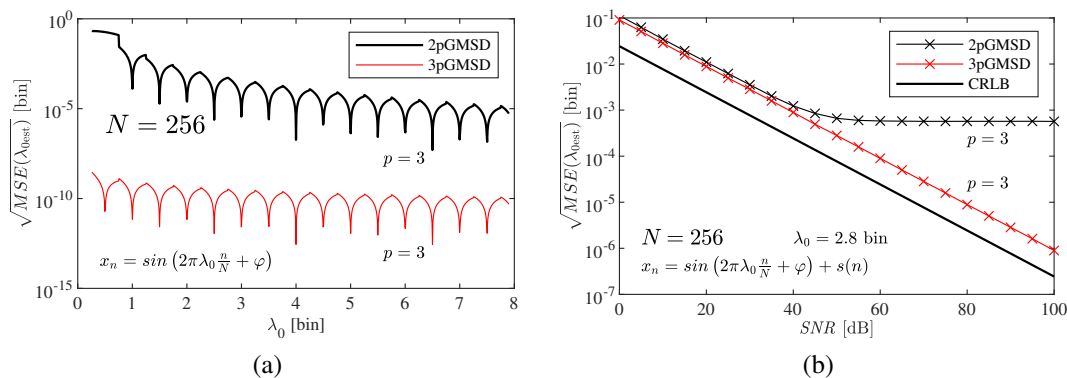
Rysunek 5.9. Porównanie błędów metody 2pGMSD dla parametru  $p = 3$  z metodą Wanga i in. [113] w przypadku sygnału sinusoidalnego zakłóconego **wieloma harmonicznymi** wskazanymi przez tabelę 5.1 dla wybranego zakresu częstotliwości  $\lambda_0$  i jednej wybranej  $\lambda_0 = 3,8$  bin. Rozpatrywane są dwa przypadki: dla wykresów (a) i (b) wykorzystywany jest sygnał z niskim poziomem zaszumienia ( $SNR=100$  dB), z kolei dla wykresów (c) i (d) z wysokim poziomem zaszumienia ( $SNR=10$  dB).

prążków DFT. Wykres 5.9b pozwala na potwierdzenie tych spostrzeżeń, ze względu na widoczną zależność pomiędzy rosnącym błędem RMSE przy rosnącym stopniu zniekształceń harmonicznymi. Nachylenie charakterystyki jest jednak mniejsze niż dla wykresów uzyskanych dla badania wpływu obecności drugiej harmonicznej, jako że wzrost amplitudy tej harmonicznej jest odpowiednio mniejszy przy tej samej wartości współczynnika THD. Niezmieniający się poziom błędów dla estymatora Lianga i in. [113] świadczy z kolei o dominacji błędów wynikających z obecności składowej sprzężonej nad wpływem harmonicznymi. Dla przypadku sygnału z dużym poziomem zaszumienia ( $SNR = 10$  dB) wykresy 5.9c i 5.9d pozwalają na powtórzenie wniosków towarzyszących rozważaniom na temat obu wcześniejszych badań (rysunki 5.7 i 5.8). Dla metody Lianga dominuje błąd systematyczny pochodzący od składowej sprzężonej, zaś dla metody 2pGMSD dominuje wariancja. We wszystkich sprawdzanych zakresach parametrów metoda dwupunktowa GMSD pozwala na uzyskanie lepszych rezultatów.

Tabela 5.1. Stosunek amplitud kolejnych harmonicznymi zawartych w sygnale.

Krotność harmonicznej $h$	2	3	4	5	6	7	8	9
Względna amplituda $\delta_h$	2	5	1	6	0,5	5	0,5	1,5

Tabela 5.1 przedstawia amplitudy względne  $\delta_h$  składowych harmonicznymi zawartych w sygnale testowym dla badań uwzględniających wiele składowych harmonicznymi. Wartość amplitudy harmonicznej  $A_h$ , dla ustalonej wartości współczynnika THD, można obliczyć z wykorzystaniem wartości  $\delta_h$  przez zastosowanie zależności (5.4), dla założenia



Rysunek 5.10. Porównanie błędów metody 2pGMSD i 3pGMSD w przypadku rzeczywistego sygnału sinusoidalnego.

jednostkowej amplitudy składowej podstawowej  $A_1$ :

$$A_h = \delta_h \frac{A_1 \text{THD}}{\sqrt{\sum_{h=2}^9 \delta_h^2}} \approx \delta_h \frac{\text{THD}}{9,68} \quad \text{dla} \quad A_1 = 1 \quad (5.4)$$

Powyższa zależność wynika bezpośrednio z definicji współczynnika THD (równanie (5.3)).

## 5.4 Metoda trzypunktowa GMSD

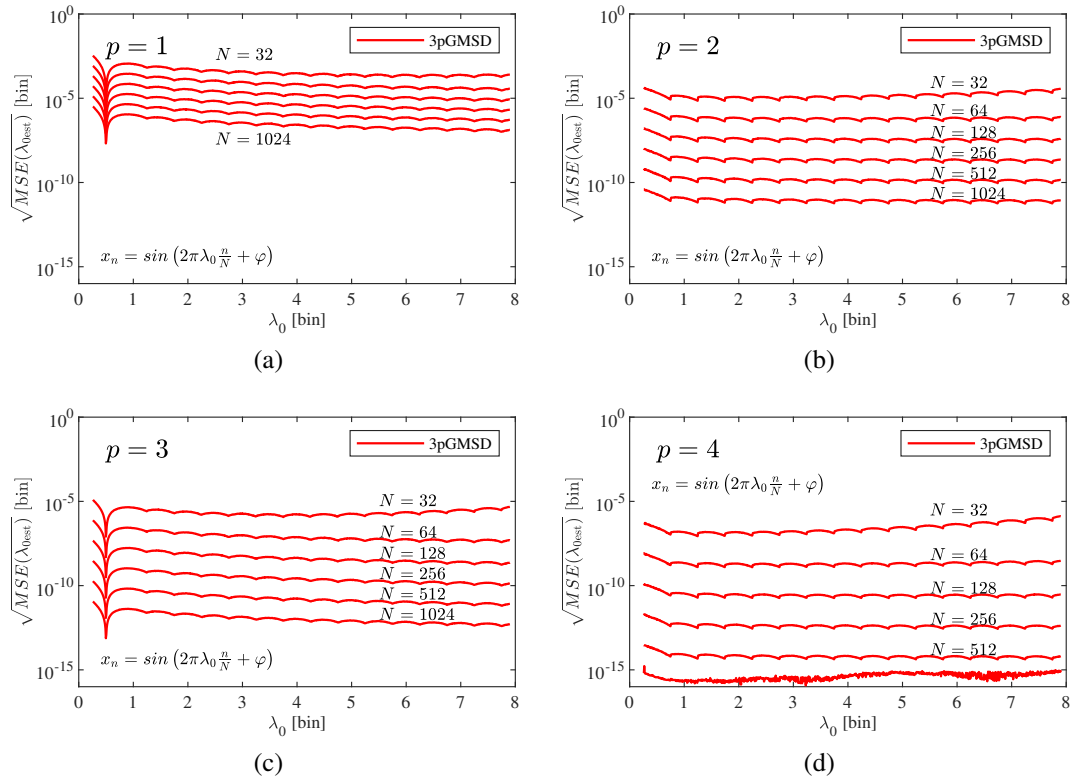
### 5.4.1 Estymacja częstotliwości dla pojedynczej oscylacji rzeczywistej

Metoda trzypunktowa dla okien GMSD wprowadzona w rozdziale 4 wykorzystuje formułę (4.42) do estymacji częstotliwości unormowanej  $\lambda_0$ . Formuła interpolacyjna korzysta z trzech prążków DFT położonych symetrycznie względem indeksu  $k$ . Najważniejszą cechą metody jest uwzględnienie wpływu składowej sprzężonej w przyjętym modelu interpolacji. Pozwala to na uzyskanie wysokiej dokładności estymacji częstotliwości dla rzeczywistego sygnału sinusoidalnego nawet dla bardzo krótkich czasów pomiaru. W dalszej części rozdziału zaprezentowane zostały charakterystyki błędu RMSE pozwalające na ocenę efektywności użycia metody trzypunktowej dla różnych parametrów metody, pomiaru i sygnału wejściowego.

### Eliminacja wpływu składowej sprzężonej – porównanie metod dwupunktowej 2pGMSD i trzypunktowej 3pGMSD

Przedstawione na rysunku 5.10 wyniki badań symulacyjnych mają na celu porównanie metody trzypunktowej 3pGMSD z metodą dwupunktową 2pGMSD w przypadku estymacji częstotliwości podstawowej sygnału sinusoidalnego. Charakterystyki błędu RMSE na wykresach zostały uzyskane dla tego samego parametru okna czasowego GMSD  $p = 3$  i dla  $N = 256$  próbek sygnału.

Na wykresie 5.10a zostały przedstawione charakterystyki błędu w funkcji częstotliwości podstawowej  $\lambda_0$  dla przypadku rzeczywistego sygnału sinusoidalnego, bez zakłóceń losowych. Pozwala to na ocenę wartości obciążenia w odniesieniu do błędu całkowitego dla obu metod. Na wykresie widać wyraźnie, że zastosowanie metody 3pGMSD pozwala



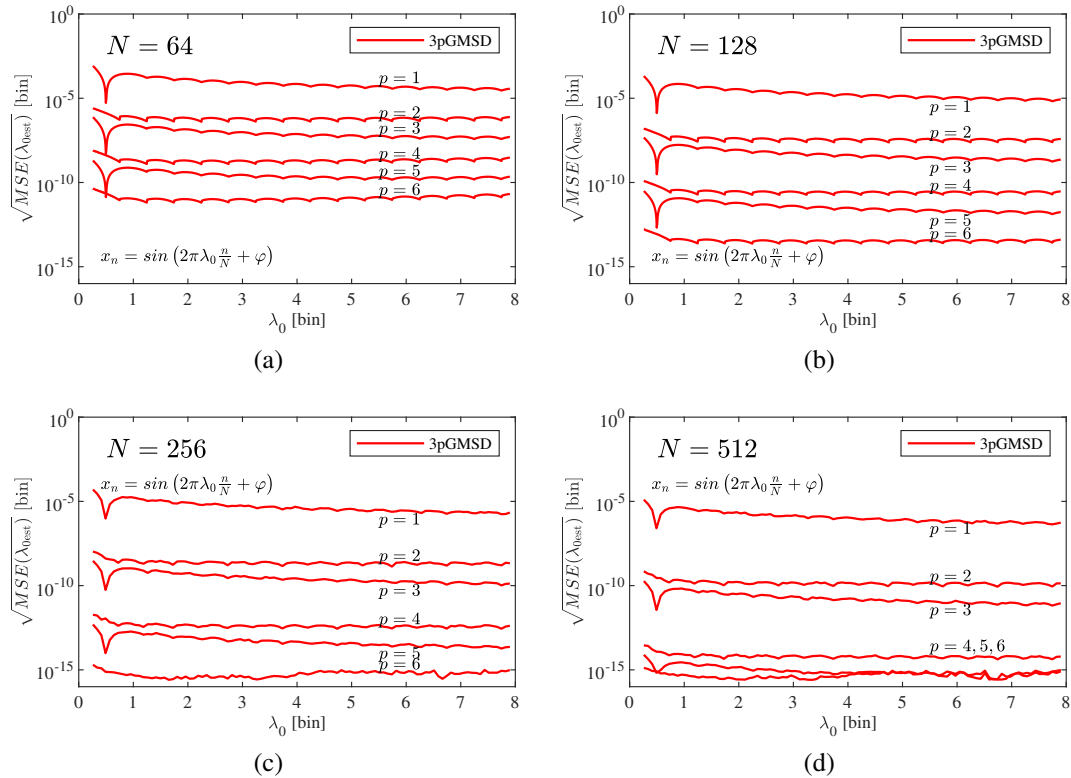
Rysunek 5.11. Charakterystyki błędu RMSE estymatora 3pGMSD przedstawione dla zmieniającej się częstotliwości podstawowej  $\lambda_0$  w przypadku sygnału złożonego z **rzeczywistej składowej sinusoidalnej**. Na rysunkach pokazano wpływ liczby próbek  $N$  sygnału na obciążenie estymatora dla czterech wybranych wartości parametru  $p$  okna GMSD.

na redukcję obciążenia wynikającego z obecności składowej sprzężonej do poziomu używanego dla metody 2pGMSD w przypadku estymacji oscylacji zespolonej (rysunki od 5.1 do 5.5).

Na wykresie 5.10b zostały przedstawione charakterystyki błędu RMSE w funkcji wartości współczynnika SNR dla przypadku sygnału zakłóconego szumem. W całym zakresie wartości metoda 3pGMSD pozwala na uzyskanie mniejszej wartości błędu. Dla wartości SNR  $> 50$  dB charakterystyka błędu metody 2pGMSD zaczyna przyjmować wartość stałą pomimo zmniejszania się energii szumu. Świadczy to o tym, że obciążenie zaczyna być składnikiem dominującym w błędzie całkowitym RMSE.

### Wpływ liczby próbek $N$ na wartość obciążenia estymatora

Analiza błędu estymatora trypunktowego została przeprowadzona przez powtórzenie scenariusza badań opisanych wcześniej w niniejszym rozdziale dla przypadku analizy metody dwupunktowej (rysunki od 5.1 do 5.10). Główną różnicę stanowi to, że rozpatrywany jest sygnał zawierający pojedynczą rzeczywistą sinusoidę zamiast oscylacji zespolonej. W pierwszej kolejności badany jest sygnał pozbawiony zakłóceń losowych. Takie podejście umożliwia zbadanie błędu związanego z obciążeniem estymatora 3pGMSD ze względu na przyjęte parametry metody. Na rysunku 5.11 przedstawiono wykresy charakterystyk błędu RMSE w funkcji częstotliwości podstawowej  $\lambda_0$ , które pozwalają na ocenę wpływu liczby użytych próbek  $N$  sygnału służących obliczeniu DFT na dokładność estymacji. W badaniach zastosowano wartości  $N$  kolejnych potęg dwójki od  $N = 32$  do  $N = 1024$ .

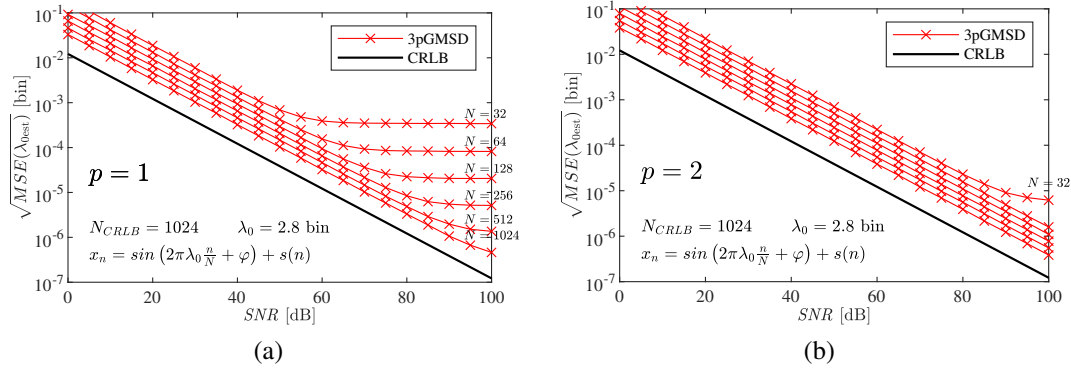


Rysunek 5.12. Charakterystyki błędu RMSE estymatora 3pGMSD przedstawione dla zmieniającej się częstotliwości podstawowej  $\lambda_0$  w przypadku sygnału złożonego z **rzeczywistej składowej sinusoidalnej**. Na rysunkach pokazano wpływ wartości parametru  $p$  na obciążenie estymatora dla czterech wybranych wartości liczby próbek  $N$  sygnału.

Poziomy błąd RMSE widoczny na uzyskanych charakterystykach dla czterech wybranych kolejnych wartości parametru  $p$  świadczy o tym, że wraz ze wzrostem liczby próbek  $N$  następuje znaczące zredukowanie błędu wynikającego z obciążenia estymatora, nawet poniżej wartości  $10^{-10}$  bin dla parametru  $p > 1$ . Zysk z zastosowania większej liczby próbek  $N$  rośnie wraz z zastosowaniem większej wartości parametru  $p$  (rosnąca różnica w błędzie widoczna dla wykresów od 5.11a do 5.11d). Dla parametru  $p = 3$  błąd RMSE jest mniejszy niż  $10^{-5}$  bin dla wszystkich badanych wartości  $N$ , zaś dla wartości  $N > 512$  zmniejsza się poniżej wartości  $10^{-10}$  bin. Na rysunku 5.11d charakterystyka związana z liczbą próbek  $N = 1024$  przyjmuje odmienny kształt ze względu na ograniczenia związane z dokładnością wykorzystywanej arytmetyki. Powyższy opis wyników pokrywa się w dużym stopniu z opisem poświęconym estymatorowi 2pGMSD dla przypadku sygnału złożonego z pojedynczej oscylacji zespolonej (rysunek 5.1). Dotyczy to kwestii poziomu uzyskiwanych błędów i kształtu charakterystyk błędów. Świadczy to o tym, że wpływ składowej sprzężonej jest skutecznie zredukowany.

### Wpływ wartości parametru $p$ okna czasowego na obciążenie estymatora

Charakterystyki błędu RMSE umieszczone na rysunku 5.11 umożliwiają łatwą ocenę zmiany wartości parametru  $N$  na wynik estymacji przy ustalonej wartości parametru  $p$  okna czasowego. Z kolei wpływ zmiany wartości  $p$  na wartość błędu został przedstawiony na rysunku 5.12 dla ustalonej liczby próbek  $N$ . W badaniach zastosowano wartości parametru  $p$  dla rosnących wartości od  $p = 1$  do  $p = 6$ . Charakterystyki błędu uzyskane dla



Rysunek 5.13. Błąd RMSE ze względu na wartość SNR sygnału dla różnych wartości próbek  $N$  sygnału.

czterech wybranych wartości liczby próbek  $N$  sygnału pokazują, że wraz ze wzrostem wartości parametru  $p$  następuje znacząca redukcja obciążenia estymatora (dla wszystkich rozważanych wartości  $N$  uzyskano wynik poniżej  $10^{-10}$  bin), w szczególności przy rosnącej zmianie wartości z nieparzystej na parzystą. Różnica wynikająca ze zmiany wartości parametru okna, przy okazji przejścia odwrotnego, jest znacząco mniejsza (rosnąca zmiana z wartości parzystej na nieparzystą). Zysk z zastosowania większej liczby próbek  $N$  jest większy wraz z większymi wartościami parametru  $p$ , co widać przy porównaniu kolejnych wykresów od 5.12a do 5.12d. Dla liczby próbek  $N = 512$  błąd RMSE jest mniejszy niż  $10^{-5}$  bin dla wszystkich badanych wartości parametru  $p$  okna czasowego. To samo można powiedzieć o charakterystykach błędu uzyskanych dla wartości parametru okna wynoszącego co najmniej  $p = 2$ , dla wszystkich rozpatrywanych wartości liczby próbek  $N$ . Na rysunku 5.12c i 5.12d charakterystyki związane z większymi wartościami parametru  $p$  przyjmują odmienny kształt ze względu na ograniczoną dokładność obliczeń zastosowanych w symulacjach. Jak wskazano już wcześniej przy okazji omawiania wyników widocznych na rysunku 5.11 – uzyskane charakterystyki w większości odpowiadają wynikom otrzymanym dla estymatora 2pGMSD w przypadku estymacji sygnału zespolonego, co pokazuje, że metoda trzypunktowa 3pGMSD pozwala na silne ograniczenie wpływu składowej sprzężonej w estymacji.

### Wpływ zakłóceń losowych na dokładność metody trzypunktowej

Ocena odporności na szum badanego estymatora trzypunktowego jest przeprowadzona z wykorzystaniem kolejnych badań symulacyjnych, które są wykonane w analogiczny sposób jak dla estymatora dwupunktowego (rysunek 5.3). Wykorzystany został sygnał składający się z pojedynczej rzeczywistej składowej sinusoidalnej zniekształconej szumem AWGN. Wpływ obecności szumu w sygnale wejściowym powoduje, że uzyskiwana wartość błędu zwiększa się ze względu na określoną wartość wariancji estymatora (zgodnie z zależnością (5.1)).

Na rysunku 5.13 zostały przedstawione charakterystyki błędu RMSE w funkcji wartości współczynnika SNR dla przedziału  $[0, 100]$  dB. Wykorzystywana jest przy tym ustalona wartość częstotliwości podstawowej  $\lambda_0 = 2,8$  bin. Na wykresach zostały przedstawione charakterystyki błędu RMSE dla kolejnych wartości liczby próbek sygnału, zaczynając od wartości  $N = 32$  próbek, aż do  $N = 1024$  próbek z wykorzystaniem parametrów okna  $p = 1$  na wykresie 5.13a oraz  $p = 2$  na wykresie 5.13b. Czarną linią oznaczo-



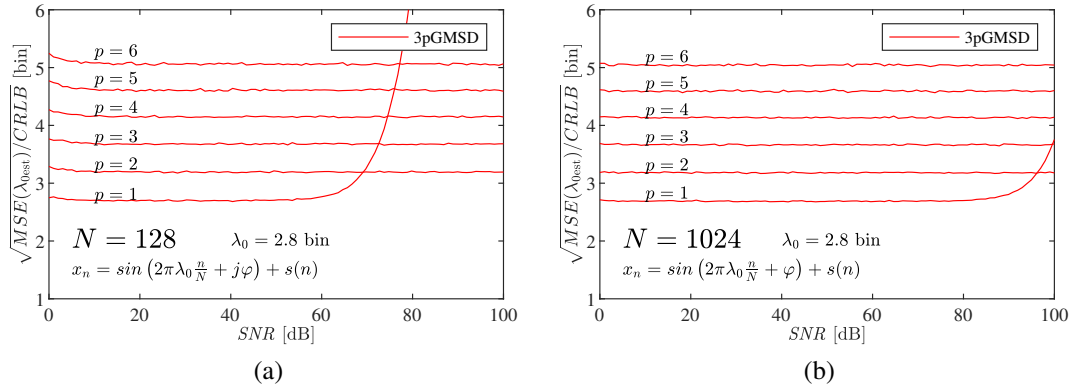
no natomiast wartości ograniczenia Craméra-Rao dla przypadku estymacji częstotliwości pojedynczej oscylacji zespolonej. Zależności wyprowadzone dla przypadku oscylacji rzeczywistej [73] pozwalają na wyznaczenie ograniczenia Craméra-Rao dla estymatora trzypunktowego 3pGMSD, jednakże ze względu na to, że przedstawione wykresy zawierają charakterystyki porównawcze dla metod z różnymi modelami wyjściowymi, użyta jest wartość ograniczenia Craméra-Rao dla modelu oscylacji zespolonej (zależność (2.2)).

Dla rozważanego zakresu wartości współczynnika SNR, w przypadku użycia parametru  $p = 1$  okna czasowego, wszystkie charakterystyki wykazują zmianę dynamiki uzyskiwanej dokładności. Na wykresie objawia się to w postaci występowania regionu przejściowego pomiędzy wartościami malejącymi liniowo i wartościami stałymi. Tak jak zostało to już omówione przy okazji badań związanych z estymatorem 2pGMSD (rozdział 5.3), występowanie regionów przejściowych ma związek ze zmianą dominacji wariancji na rzecz obciążenia w ujęciu błędu całkowitego. Dla charakterystyki z liczbą próbek  $N = 32$  region ten jest położony w okolicach wartości SNR = 50 dB i dla kolejnych wartości  $N$  jego położenie przesuwa się w kierunku większych wartości SNR. Dla charakterystyki z liczbą próbek  $N = 1024$  region przejściowy jest położony w okolicach wartości SNR = 100 dB. Wartości błędu RMSE w rejonach dominacji obciążenia przyjmują podobne wartości jak uzyskane dla dwóch wcześniejszych rysunków przedstawiających charakterystyki obciążenia estymatora 3pGMSD (rysunki 5.11 i 5.12). Na drugim z przedstawionych wykresów 5.13b, dla parametru  $p = 2$  okna czasowego, pokazane zostały charakterystyki, dla których w całym badanym zakresie wartości SNR dominuje błąd związany z występowaniem zakłóceń losowych, z wyłączeniem charakterystyki dla  $N = 32$ . Dla tej wartości liczby próbek region zawierający zmianę dynamiki charakterystyki położony jest w okolicach SNR = 90 dB. Poziom błąd RMSE, dla którego charakterystyka przechodzi w rejon z dominacją obciążenia, jest zbliżony z wynikami otrzymanymi dla badań bez uwzględniania szumu. Uzyskane wartości są zbliżone do wyników otrzymanych dla estymatora 2pGMSD w przypadku sygnału złożonego wyłącznie z pojedynczej składowej zespolonej (opis rysunku 5.3).

### **Charakterystyki błędu RMSE w odniesieniu do granicy Craméra-Rao ze względu na użyty parametr okna**

Charakterystyki błędu RMSE, w przypadku użycia sześciu kolejnych parametrów okna czasowego  $p = 1, \dots, 6$  oraz dwóch wartości liczby próbek:  $N = 128$  i  $N = 1024$ , zostały przedstawione na rysunku 5.14. Wartości błędu na rysunku są odniesione do wartości ograniczenia Craméra-Rao dla rozważanej liczby próbek  $N$ , co pozwala na uzyskanie informacji ilościowej o wariancji estymatora oraz na ocenę wpływu wyboru parametru  $p$  na wynik estymacji dla wielu wartości jednocześnie. Tak jak w przypadku poprzedniego rysunku wykorzystana została częstotliwość  $\lambda_0 = 2,8$  bin dla pojedynczej oscylacji rzeczywistej.

Główną różnicę widoczną przy zestawieniu charakterystyk dla obu wartości liczby próbek  $N$  stanowi kształt charakterystyki dla parametru  $p = 1$  okna czasowego. Dla małej liczby próbek sygnału  $N = 128$  można zaobserwować efekt skokowego zwiększenia się wartości względnej błędu ze względu na to, że składnikiem przeważającym w błędzie staje się obciążenie. Zmiana dynamiki występuje w okolicy wartości SNR = 70 dB współczynnika SNR. Zastosowanie liczby próbek  $N = 1024$  przesuwa ten punkt do poziomu SNR  $\approx 90$  dB. Przedstawione charakterystyki błędu pokazują, że w badanym zakresie wartości zaszumienia, wybór współczynników okna o wartościach większych niż  $p = 1$  pozwala



Rysunek 5.14. Błąd RMSE odniesiony do ograniczenia Craméra-Rao ze względu na wartość SNR sygnału dla różnych wartości parametru  $p$  okna czasowego.

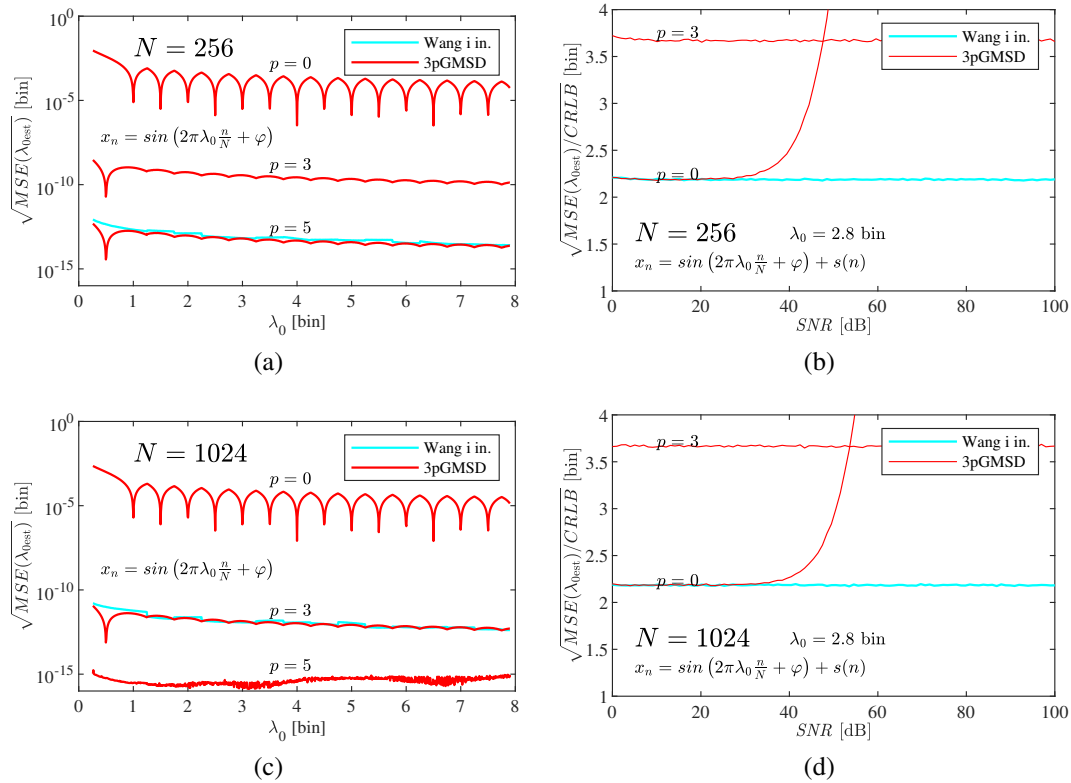
na eliminację obciążenia znacznie poniżej poziomu błędu związanego z wariancją estymatora.

### 5.4.2 Porównanie z wybraną metodą z bezpośrednią eliminacją wpływu składowej sprzężonej

#### Pojedyncza składowa sinusoidalna

Analizowany w niniejszym rozdziale estymator trzypunktowy 3pGMSD został porównany z inną metodą interpolacji widma DFT. Wybrana została metoda Wanga i in. [170], będąca jedną z nowszych metod, które charakteryzują się bezpośrednim uwzględnieniem wpływu składowej sprzężonej bezpośrednio w formule interpolacyjnej. Metoda ta charakteryzuje się niską wartością obciążenia, nawet dla małej liczby wykorzystanych w pomiarze próbek  $N$ , z uwagi na wyprowadzenie wykorzystujące dokładne wyrażenia określające widmo okna prostokątnego (rozdział 3.6.3).

Wykresy umieszczone na rysunku 5.15 zawierają charakterystyki błędu RMSE, dzięki którym możliwa jest ocena skuteczności eliminacji wpływu składowej sprzężonej za pomocą metody Wanga i in. [170] wraz z porównaniem do charakterystyk metody trzypunktowej 3pGMSD. Badania zostały przeprowadzone dla sygnału zawierającego pojedynczą oscylację sinusoidalną, który nie jest zakłócony szumem (na wykresach 5.15a i 5.15c) oraz sygnału zakłóconego szumem AWGN (na wykresach 5.15b i 5.15d). Na wykresie 5.15a zostały przedstawione charakterystyki błędu RMSE dla zmieniającej się wartości częstotliwości podstawowej dla obu analizowanych metod. Formuła 3pGMSD jest użyta z trzema wartościami parametru okna:  $p = 0$  (okno prostokątne),  $p = 3$  i  $p = 5$ . Liczba próbek sygnału została ustalona na  $N = 256$ . Na wykresie widać, że metoda Wanga charakteryzuje się wartością obciążenia zbliżoną do wartości błędu metody 3pGMSD w przypadku zastosowania okna ze współczynnikiem  $p = 5$ . Jednocześnie, jak widać na wykresie 5.15b, błąd związany z zakłóceniami losowymi jest na tym samym poziomie co dla estymatora 3pGMSD z nałożonym oknem prostokątnym  $p = 0$ . Na wykresach można zobaczyć, że w pewnym zakresie parametrów, zastosowanie estymatora Wanga okazuje się lepszym wyborem. Charakterystyki umieszczone na wykresie 5.15b pozwalają na stwierdzenie, że jest to przypadek użycia estymatora Wanga w zakresie  $SNR > 20$  dB, aż do wartości SNR kiedy błąd spowodowany obecnością zakłóceń losowych przestaje być składnikiem dominującym (region położony poza wykresem  $SNR > 100$  dB). Poza tym obszarem, mniejszą



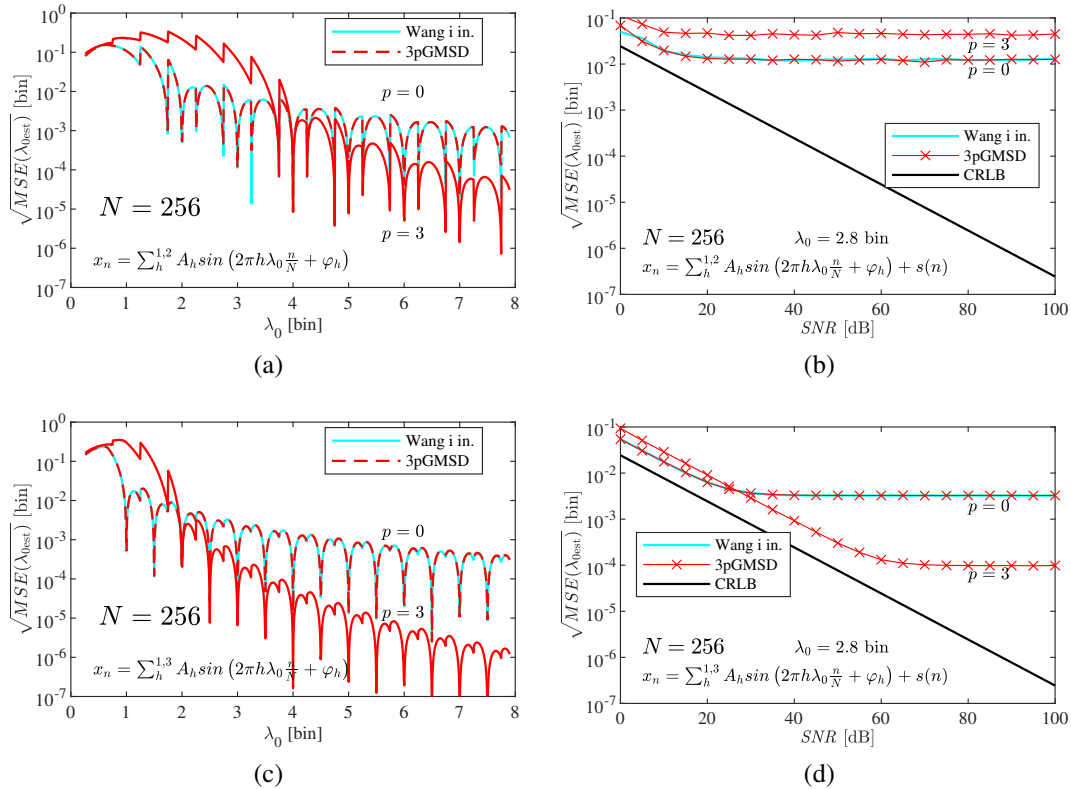
Rysunek 5.15. Porównanie błędów metody 3pGMSD dla różnych parametrów okna z metodą Wang i in. [170].

wartość obciążenia dla estymatora 3pGMSD można otrzymać dla większych wartości parametru  $p$  okna czasowego. W przypadku estymatorów wykorzystujących okna GMSD możliwe jest dalsze ograniczenie obciążenia przez zwiększenie liczby używanych próbek  $N$ . Na wykresach 5.15c i 5.15d zostały przedstawione charakterystyki błędu dla przypadku wartości  $N = 1024$  próbek. Z rysunku można także odczytać, że zwiększenie wartości parametru  $N$  pozwoliło na uzyskanie wartości obciążenia estymatora 3pGMSD zbliżoną do obciążenia uzyskiwanego przez estymator Wang już dla wartości  $p = 3$ .

Przedstawione symulacje dotyczą badania wpływu obecności w sygnale pojedynczej składowej sinusoidalnej zakłóconej szumem. Zastosowanie okna prostokątnego w metodzie Wang pozwala uzyskać dokładną formułę interpolacyjną. Kosztem takiego podejścia jest jednak zwiększenie podatności na obecność bliskich składowych zakłócających. Dlatego porównanie metod uzupełnione jest o symulacje dla sytuacji obecności zakłóceń harmoniczných.

### Wpływ harmonicznej niskiego rzędu na wynik estymacji

Na rysunku 5.16 zostały przedstawione wyniki badań dla przypadku estymacji częstotliwości podstawowej sygnału zakłóconego jedną składową harmoniczną niskiego rzędu – kolejno drugą harmoniczną (rysunki 5.16a i 5.16b) oraz trzecią harmoniczną (rysunki 5.16c i 5.16d). We wszystkich symulacjach błąd RMSE, w przypadku zastosowania okna prostokątnego ( $p = 0$ ) dla obu metod, jest bardzo zbliżony w całym zakresie częstotliwości podstawowej  $\lambda_0$  (rysunki 5.16a i 5.16c) i dla całego badanego zakresu wartości parametru SNR (rysunki 5.16c i 5.16d).



Rysunek 5.16. Porównanie błędów metody 3pGMSD z metodą Wang'a i in. [170] w przypadku rzeczywistego sygnału sinusoidalnego zakłóconego harmoniczną: (a) i (b) sygnał zakłócony jest drugą harmoniczną, (c) i (d) sygnał zakłócony jest trzecią harmoniczną.

W przypadku sygnału zawierającego drugą harmoniczną z amplitudą  $A_2 = 0,1$ ; wykorzystanie parametru  $p = 3$  dla metody 3pGMSD pozwala na redukcję obciążenia poniżej poziomu uzyskanego przez metodę Wang'a dla częstotliwości większych niż  $\lambda_0 = 4$  bin, co pokazuje rysunek 5.16a. Dla mniejszych wartości  $\lambda_0$  lepsze rezultaty daje zastosowanie okna prostokątnego ( $p = 0$ ) dla obu badanych metod. Dla ustalonej częstotliwości podstawowej  $\lambda_0 = 2,8$  bin zastosowanie okna o parametrze  $p = 3$  daje gorsze rezultaty dla całego badanego zakresu wartości współczynnika SNR (rysunek 5.16b), co nie stanowi jednak zaskoczenia ze względu na zwiększoną wartość wariancji w porównaniu do metod wykorzystujących okno prostokątne i większą wartość obciążenia, na którą wskazuje wykres 5.16a.

W przypadku analizy błędów w obecności trzeciej harmonicznej dla tej samej wartości amplitudy zakłócenia jak dla drugiej harmonicznej, tj.  $A_3 = 0,1$ , granica częstotliwości  $\lambda_0$ , dla której parametr okna  $p = 3$  pozwala na uzyskanie mniejszej wartości obciążenia estymatora, przesuwa się w okolice  $\lambda_0 = 2$  bin (rysunek 5.16c). Dzięki temu wcześniej przyjęta wartość stałej częstotliwości  $\lambda_0 = 2,8$  bin pozwala na osiągnięcie mniejszego błędów całkowitego dla wartości SNR  $> 35$  dB (rysunek 5.16d). Dla wartości przedziału SNR  $> 60$  dB względna krotność błędów estymacji pozostaje na poziomie ok.  $10^2$ , co odpowiada wartości odczytanej z wykresu 5.16c dla  $\lambda_0 = 2,8$  bin.

Badania pokazały, że obecność bliskiej składowej harmonicznej, nawet z małą wartością amplitudy, powoduje, że wartość błędów całkowitych dla obu metod jest w praktyce identyczna dla zastosowania okna prostokątnego ( $p = 0$ ). Stąd wynika też, że użycie metody wykorzystującej okno GMSD pozwala na uzyskanie co najmniej takiej samej dokład-

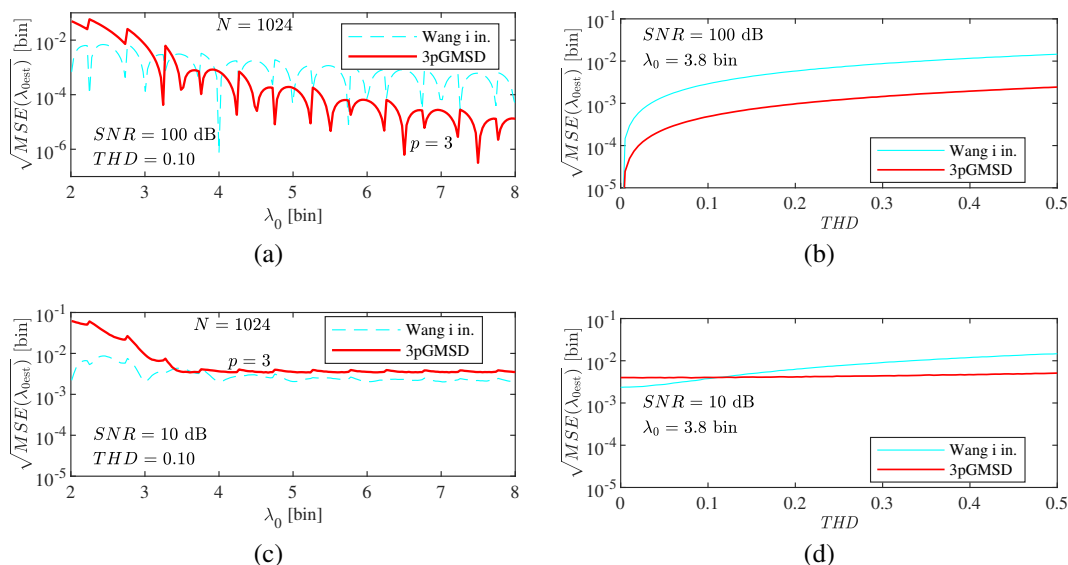
ności jak w przypadku metody Wanga, gdy w sygnale obecna jest harmoniczna niskiego rzędu.

### 5.4.3 Analiza wpływu zakłóceń harmoniczných

Badania opisane w rozdziale 5.4.2 dostarczyły charakterystyki błędu całkowitego RMSE w przypadku estymacji częstotliwości podstawowej sygnału zakłóconego składową harmoniczną niskiego rzędu. Pozwalają one na oszacowanie składowej błędu związanej z obciążeniem i wskazują na obszar SNR, dla którego składnikiem dominującym staje się wariancja estymatora. W dalszej części przedstawiono rozszerzoną analizę wpływu zakłóceń harmoniczných na dokładność estymacji uzyskiwaną przy użyciu metody trzypunktowej. Parametry metody zastosowane w badaniach symulacyjnych zostały dobrane w taki sposób, aby odpowiadały praktycznemu zastosowaniu i pośrednio wynikają z analizy rysunków 5.15 i 5.16. W pierwszej kolejności analizowany jest przypadek sygnału zakłóconego pojedynczą harmoniczną i rosnącą wartością THD, a następnie sygnał złożony z wielu harmoniczných. Poniższe symulacje dla metod 3pGSMD i metody Wanga i in. [170] odpowiadają symulacjom dla przypadku pojedynczej składowej zespolonej i metody dwupunktowej, których wyniki zostały przedstawione wcześniej na rysunkach 5.7, 5.8 i 5.9.

#### Wpływ obecności drugiej harmonicznej na dokładność estymacji

Na wykresach 5.17a i 5.17c zostały przedstawione wyniki badań dla przypadku rzeczywistego sygnału sinusoidalnego zakłóconego drugą harmoniczną o amplitudzie stanowiącej 10% amplitudy składowej podstawowej. Uzyskane charakterystyki błędu zostały wyznaczone w funkcji wartości częstotliwości podstawowej w zakresie  $\lambda_0 \in [2, 8]$  bin. Z kolei na wykresach 5.17b i 5.17d umieszczone zostały charakterystyki dla ustalonej wartości  $\lambda_0 = 3,8$  bin i rosnącej wartości amplitudy drugiej harmonicznej wyrażonej pośrednio przez współczynnik THD. Symulacje zostały przeprowadzone dla dwóch poziomów zaszumienia  $\text{SNR} = 100$  dB (wykresy 5.17a i 5.17b) oraz  $\text{SNR} = 10$  dB (wykresy 5.17c i 5.17d), co pozwoliło na ocenę dokładności estymacji w przypadku dominacji obciążenia i w przypadku dominacji błędu związanego z obecnością zakłóceń losowych w ujęciu błędu całkowitego. Charakterystyki błędu RMSE zostały uzyskane dla  $N = 1024$  próbek, dla obu porównywanych metod, gdzie dla metody 3pGSMD został wykorzystany parametr okna  $p = 3$ . Na wykresach znajdujących się po lewej stronie rysunku, tj. 5.17a i 5.17c przedstawione zostały charakterystyki błędu w funkcji częstotliwości podstawowej  $\lambda_0$ . W prawej części rysunku znajdują się natomiast wykresy 5.7b i 5.7d, które pozwalają na ocenę wpływu rosnącej amplitudy drugiej harmonicznej na wynik estymacji (pośrednio przez zwiększanie wartości współczynnika THD). Błąd całkowity RMSE w przypadku sygnału o niskim stopniu zaszumienia ( $\text{SNR} = 100$  dB) jest mniejszy dla estymatora Wanga dla częstotliwości  $\lambda_0 < 3,5$  bin. Rysunek 5.17a pokazuje, że dla estymatora 3pGSMD szybkość opadania charakterystyk błędu jest większa ze względu na wykorzystanie okna z parametrem  $p = 3$ . Charakterystyki umieszczone na wykresie 5.17b pokazują dynamikę zmiany błędu dla zmieniającej się zawartości drugiej harmonicznej w sygnale przy stałej wartości częstotliwości  $\lambda_0 = 3,8$  bin, dla której w całym zakresie korzystniej wypada metoda 3pGSMD. Z kolei w przypadku wysokiego poziomu zaszumienia sygnału ( $\text{SNR} = 10$  dB) dominuje składnik błędu wynikający z obecności zakłóceń losowych, dla którego w prawie całym zakresie badanych parametrów lepsze rezultaty otrzymano z wykorzystaniem metoda Wanga. Charakterystyki błędu RMSE umieszczone na rysunku 5.17c



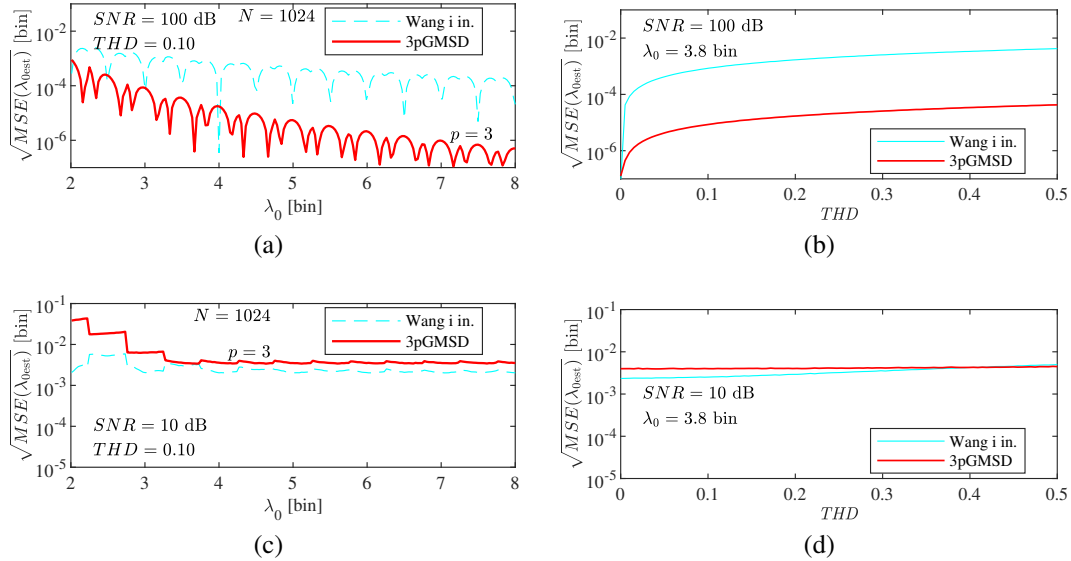
Rysunek 5.17. Porównanie błędów metody 3pGMSD dla różnych parametrów okna z metodą Wang i in. [170] w przypadku rzeczywistego sygnału sinusoidalnego zakłóconego **drugą harmoniczną** dla wybranej częstotliwości  $\lambda_0 = 3,8$  bin. Rozpatrywane są dwa przypadki: dla wykresów (a) i (b) wykorzystywany jest sygnał z niskim poziomem zaszumienia ( $SNR=100$  dB), z kolei dla wykresów (c) i (d) z wysokim poziomem zaszumienia ( $SNR=10$  dB).

pozwalają na stwierdzenie większej dokładności estymatora Wang dla wartości  $\lambda_0 < 3,5$  bin. Różnica w dokładności estymatorów widoczna na rysunku 5.17d zmniejsza się wraz ze wzrostem udziału drugiej harmonicznej i zmienia się na korzyść estymatora 3pGMSD dla większych wartości amplitudy drugiej harmonicznej  $THD > 0,1$ .

### Wpływ obecności trzeciej harmonicznej na dokładność estymacji

Na rysunku 5.18 zostały przedstawione wyniki badań przeprowadzonych dla przypadku sygnału składającego się ze składowej sinusoidalnej zakłóconej harmoniczną trzeciego rzędu. Powtórzony został scenariusz z badania przeprowadzonego dla składowej harmonicznej rzędu drugiego (rysunek 5.17). Dla przypadku sygnału z niskim poziomem zaszumienia ( $SNR = 100$  dB) wpływ trzeciej harmonicznej na wyniki estymacji metody 3pGMSD jest znacząco mniejszy niż dla drugiej harmonicznej, przykładowo zmniejsza się o około jeden rząd wielkości dla częstotliwości  $\lambda_0 = 6$  bin. Charakterystyki błędu na wykresie 5.18a wskazują na przewagę tej metody nad metodą Wang, co bezpośrednio wynika z dobrego dopasowania parametru  $p = 3$  dla pomiaru w tym zakresie częstotliwości. Dla ustalonej częstotliwości  $\lambda_0 = 3,8$  bin krotność między wartościami błędu osiąga ok.  $10^{-2}$  i utrzymuje się dla wartości współczynnika THD większych niż ok. 0,05 (wykres 5.18b).

Dla przypadku sygnału z dużym poziomem zaszumienia ( $SNR = 10$  dB) wykres 5.18c pozwala stwierdzić, że dla zakresu wartości  $\lambda_0 > 3$  bin dominuje błąd związany z zakłóceniami losowymi (przy ustalonym  $THD = 0,1$ ). Dotyczy to obu analizowanych metod. Na rysunku 5.18d widoczny jest jednak delikatny trend wznoszący błędu dla rosnącego poziomu zniekształceń, co świadczy o tym, że wpływ zniekształceń harmonicznnych na dokładność pomiaru w metodzie Wang jest większy niż dla metod wykorzystujących



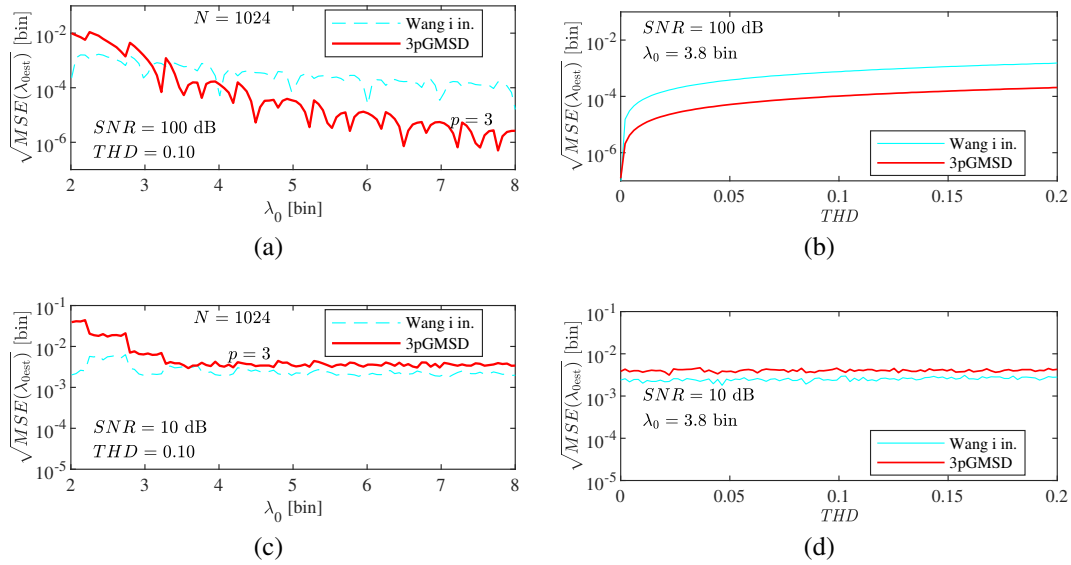
Rysunek 5.18. Porównanie błędów metody 3pGMSD dla parametru  $p = 3$  okna czasowego z metodą Wang i in. [170] w przypadku rzeczywistego sygnału sinusoidalnego zakłóconego **trzecią harmoniczną** dla wybranej częstotliwości  $\lambda_0 = 3,8$  bin. Rozpatrywane są dwa przypadki: dla wykresów (a) i (b) wykorzystywany jest sygnał z niskim poziomem zaszumienia ( $SNR=100$  dB), z kolei dla wykresów (c) i (d) z wysokim poziomem zaszumienia ( $SNR=10$  dB).

okna GMSD. Należy pamiętać, że różnica w uzyskiwanym błędzie zachodząca pomiędzy charakterystykami obu metod wynika z tego, że w metodzie Wang możliwe jest wykorzystanie wyłącznie okna prostokątnego ( $p = 0$ ).

### Wpływ obecności wielu harmoniczných na dokładność estymacji

Na rysunku 5.19 zostały przedstawione charakterystyki błędu całkowitego RMSE uzyskane w przypadku sygnału składającego się ze składowej sinusoidalnej zakłóconej ośmioma kolejnymi składowymi harmonicznymi, ze stosunkiem amplitud opisany w tabeli 5.1. Przeprowadzone badania powtarzają scenariusz obu wcześniejszych symulacji, dla których zostały uzyskane charakterystyki błędu dla przypadku obecności pojedynczej składowej harmoniczných niskiego rzędu (rysunki 5.17 i 5.18). Dla przypadku sygnału z niskim poziomem zaszumienia ( $SNR = 100$  dB) sumaryczny wpływ harmoniczných na wyniki estymacji metody trzypunktowej 3pGMSD można ocenić ze względu na wyniki umieszczone na wykresie 5.19a. Kształt charakterystyk błędu jest zbliżony do charakterystyk otrzymanych dla przypadku obecności wyłącznie drugiej harmoniczných w sygnale (rysunek 5.17), bezwzględne wartości błędu są jednak mniejsze. Podobnie jak to było w przypadku analizy estymatora dwupunktowego (rysunek 5.9), największym składnikiem obciążenia estymatora 3pGMSD jest przeciek widma pochodzący od składowej położonej najbliżej używanych prążków DFT, tj. drugiej składowej harmoniczných. Ocena wartości błędu umieszczonego na wykresie 5.19b pozwala na potwierdzenie tego przypuszczenia, ze względu na wyraźny wzrost błędu RMSE dla rosnącego stopnia zniekształceń harmoniczných.

Dla przypadku sygnału z dużym poziomem zaszumienia ( $SNR = 10$  dB), uzyskane wartości błędu przedstawione zostały na wykresach 5.19c i 5.19d. Ocena kształtu charak-



Rysunek 5.19. Porównanie błędów metody 3pGMSD dla parametru  $p = 3$  z metodą Wang i in. [170] w przypadku rzeczywistego sygnału sinusoidalnego zakłóconego **wieloma harmonicznymi** wskazanymi przez tabelę 5.1 dla wybranego zakresu częstotliwości  $\lambda_0$  i jednej wybranej  $\lambda_0 = 3,8$  bin. Rozpatrywane są dwa przypadki: dla wykresów (a) i (b) wykorzystywany jest sygnał z niskim poziomem zaszumienia ( $SNR=100$  dB), z kolei dla wykresów (c) i (d) z wysokim poziomem zaszumienia ( $SNR=10$  dB).

terystyk pozwala na powtórzenie wniosków towarzyszących rozważaniom na temat wpływu obecności w sygnale pojedynczych harmonicznymi (rysunki 5.17 i 5.18). Dla metody 3pGMSD dominuje błąd wynikający z zakłóceń losowych dla zakresu wartości  $\lambda_0 > 3,5$  bin, o czym świadczy w przybliżeniu stała wartość błędu na wykresie 5.19c oraz na wykresie 5.19d, gdzie mimo rosnącego udziału zniekształceń harmonicznymi wartość błędu jest w przybliżeniu stała dla ustalonej częstotliwości podstawowej  $\lambda_0 = 3,8$  bin.

## 5.5 Metoda pięciopunktowa GMSD

### 5.5.1 Estymacja częstotliwości dla sygnału zakłóconego pojedynczą harmoniczną

Metoda pięciopunktowa dla okien GMSD została wprowadzona w rozdziale 4 i wykorzystuje formułę interpolacyjną uzyskaną w równaniu (4.76). Przywołana zależność pozwala na wybór rzędu harmonicznymi, której wpływ jest eliminowany w estymacji, co jest realizowane za pomocą parametru  $b$ . Praktyczne znaczenie w estymacji częstotliwości z wykorzystaniem prążków DFT mają głównie składowe harmonicznymi niskiego rzędu, ze względu na bliskość umiejscowienia w widmie względem składowej podstawowej, a więc są to w szczególności druga i trzecia harmonicznymi. Stąd formuła (4.76) sprowadza się do formuły (4.77), jeśli priorytetem jest eliminowanie wpływu drugiej harmonicznymi ( $b = 2$ ) lub do formuły (4.78), jeśli jest to wpływ trzeciej harmonicznymi ( $b = 3$ ). Ocena skuteczności eliminacji wpływu składowej sprzężonej na dokładność estymacji metody pięciopunktowej 5pGMSD została wykonana na podstawie badań symulacyjnych wraz z porównaniem do dwóch wcześniej omawianych metody dwupunktowej 2pGMSD i metody trzypunktowej



3pGMSD.

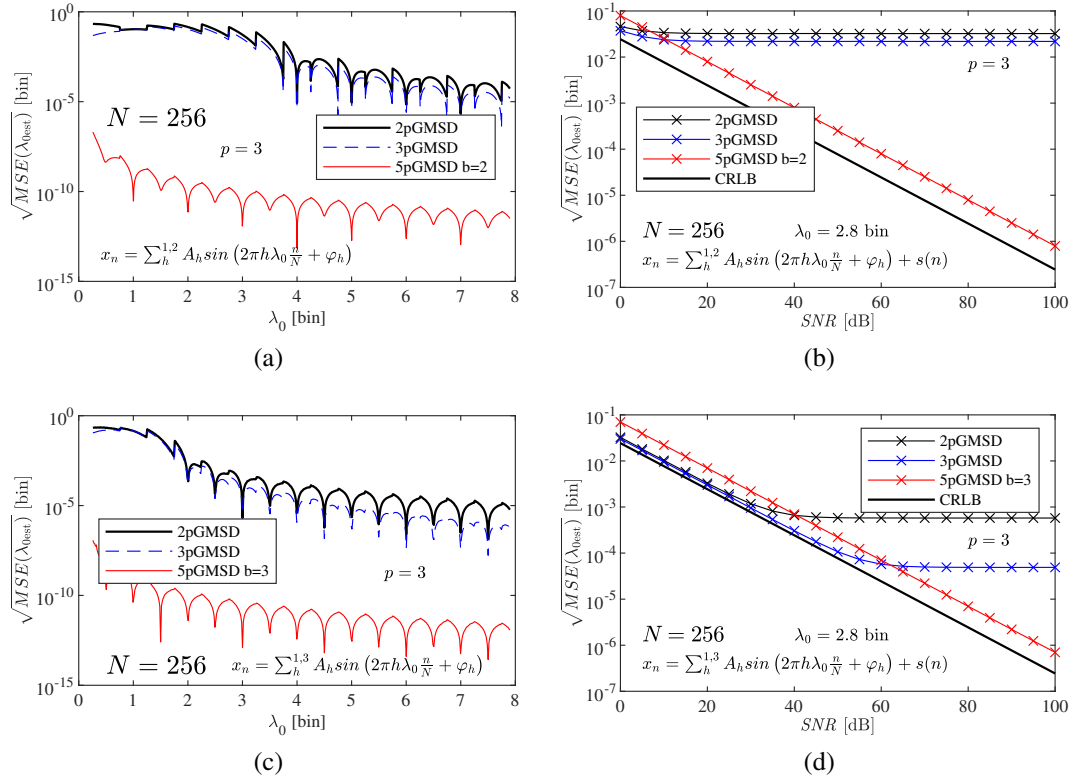
### **Eliminacja wpływu składowej harmonicznej – porównanie metody dwupunktowej 2pGMSD, trzypunktowej 3pGMSD i pięciopunktowej 5pGMSD**

Na rysunku 5.20 zostały przedstawione charakterystyki błędu całkowitego RMSE metod wykorzystujących okna GMSD dla rzeczywistego sygnału złożonego ze składowej podstawowej oraz pojedynczej składowej harmonicznej niskiego rzędu. Rozważana jest harmoniczna drugiego rzędu (rysunki 5.20a i 5.20b) oraz harmoniczna trzeciego rzędu (5.20c i 5.20d). Charakterystyki błędu uzyskane są dla metody pięciopunktowej 5pGMSD, trzypunktowej 3pGMSD i dwupunktowej 2pGMSD. Dla wszystkich metod został wybrany parametr okna  $p = 3$ . Na wykresach przedstawiono charakterystyki uzyskane dla sygnału wejściowego złożonego z  $N = 256$  próbek, a amplitudy składowych harmonicznych przyjmują wartości 0,1 względem amplitudy składowej podstawowej o częstotliwości  $\lambda_0$ .

Po lewej stronie rysunku znajdują się dwa wykresy charakterystyk błędu dla sygnału wejściowego niezakłóconego szumem (wykresy 5.20a i 5.20c). Na rysunku 5.20a zostały przedstawione charakterystyki błędu dla przypadku obecności drugiej harmonicznej, gdzie w przypadku metody pięciopunktowej wybrany został parametr  $b = 2$ , tak aby usunąć wpływ składowej drugiego rzędu. Charakterystyki reprezentują składnik obciążenia estymatora w ujęciu błędu całkowitego, z uwagi na brak zakłóceń losowych w sygnale wejściowym. Widać stąd, że metoda 5pGMSD pozwala na skuteczną eliminację wpływu drugiej składowej harmonicznej do podobnego poziomu jak w przypadku uzyskiwanego dla sygnału sinusoidalnego i metody 3pGMSD (rysunek 5.10) oraz zespolonego sygnału harmonicznego i metody 2pGMSD (rysunek 5.1). Względna krotkość pomiędzy wartościami błędu dla obu metod osiąga wartość nawet ok.  $10^8$  raza.

Podobnie jak w przypadku drugiej harmonicznej obecnej w sygnale, charakterystyki błędu dla trzeciej harmonicznej i parametru  $b = 3$  metody pięciopunktowej pozwalają na potwierdzenie skuteczności eliminacji wpływu składowej harmonicznej, co jest widoczne na wykresie 5.20c. Charakterystyki błędu dla metod 2pGMSD i 3pGMSD przyjmują odpowiednio mniejsze wartości w stosunku do wykresu 5.20a, ze względu na mniejszy wpływ trzeciej harmonicznej przy stałej wartości amplitudy składowej zakłócającej. Różnica w dokładności pomiaru pomiędzy metodami 2pGMSD i 3pGMSD wynika z wpływu składowej sprzężonej i nie przekracza jednego rzędu wartości.

Prawa strona rysunku składa się z wykresów prezentujących charakterystyki uzyskane w przypadku estymacji sygnału wejściowego zakłóconego szumem AWGN (wykresy 5.20b i 5.20d). Wykres 5.20b pokazuje przypadek obecności drugiej harmonicznej, a wykres 5.20d przypadek trzeciej harmonicznej. Wykresy zostały wykonane dla ustalonej częstotliwości podstawowej  $\lambda_0 = 2,8$  bin i przedziału wartości współczynnika  $\text{SNR} \in [0, 100]$  dB. Tak jak już wskazano wcześniej w niniejszym rozdziale, fragmenty charakterystyk przyjmujące stałe wartości wynikają z dominacji obciążenia nad błędem spowodowanym obecnością zakłóceń losowych w estymacji częstotliwości. Widać zatem, że metoda pięciopunktowa w całym rozważanym zakresie gwarantuje eliminację wpływu pojedynczej składowej harmonicznej poniżej błędu wynikającego z obecności szumu. Znaczące obniżenie błędu wynikającego z obciążenia jest jednak związane ze zwiększonym składnikiem błędu wynikającego z obecności zakłóceń losowych. Jest to widoczne dla regionu gdzie dominuje wariancja nad obciążeniem – metoda pięciopunktowa oferuje najmniejszą odporność na zakłócenia losowe ze wszystkich trzech analizowanych metod. W przypadku metod dwupunktowej i trzypunktowej obciążenie zaczyna dominować już przy wartości



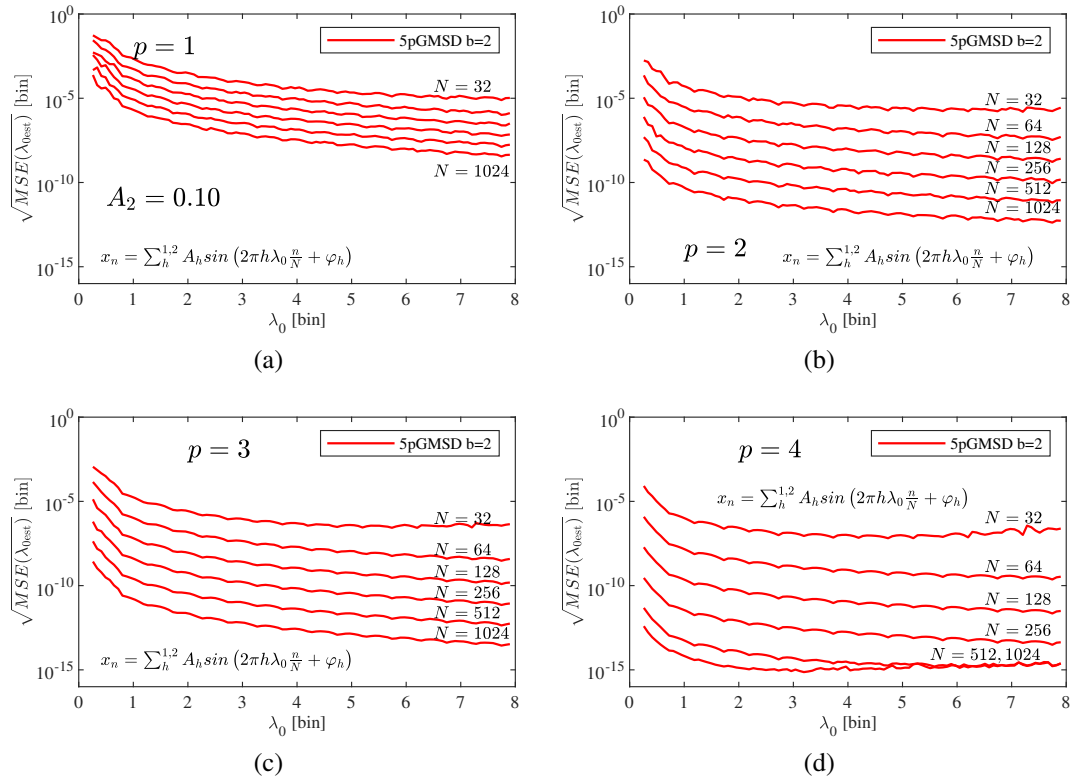
Rysunek 5.20. Porównanie błędów metody 2pGMSD, 3pGMSD i 5pGMSD w przypadku rzeczywistego sygnału sinusoidalnego i pojedynczej składowej harmonicznej niskiego rzędu.

SNR = 10 dB, gdzie błąd całkowity przyjmuje stałą wartość poniżej ok.  $10^{-1}$  bin w przypadku drugiej harmonicznej (wykres 5.20b). Błąd ten zmniejsza się aż do wartości ok.  $10^{-3}$  bin dla metody 2pGMSD i poniżej  $10^{-4}$  bin dla metody 3pGMSD w przypadku zakłócenia trzecią harmoniczną (wykres 5.20d). W przeciwieństwie do metody 5pGMSD, te wartości błędu rosną jeszcze bardziej, gdy zwiększa się amplituda harmonicznych. Zostało to pokazane dalej w niniejszym rozdziale.

### Wpływ liczby próbek $N$ na wartość obciążenia estymatora

Opisywane powyżej badania symulacyjne wykazały efektywność zastosowania metody 5pGMSD w redukcji obciążenia w przypadku obecności pojedynczej składowej harmonicznej w sygnale. Na czterech kolejnych rysunkach 5.21, 5.22, 5.23 i 5.24 zostały przedstawione charakterystyki błędu całkowitego dla kolejnych wartości liczby próbek  $N$  sygnału w przypadku zakłócenia składową harmoniczną niskiego rzędu bez zakłóceń losowych. Każdy ze wskazanych rysunków zawiera charakterystyki błędu całkowitego dla czterech różnych wartości parametru  $p$  okna czasowego i zakresu częstotliwości podstawowej sygnału  $\lambda_0 \in [0,8]$ . Rysunki różnią się wyborem parametru metody 5pGMSD  $b \in \{2,3\}$  oraz wartością amplitudy analizowanej składowej  $A_h$ .

Na rysunku 5.21 przedstawione zostały wykresy charakterystyk błędu RMSE dla przypadku sygnału zakłóconego drugą harmoniczną z amplitudą wynoszącą 10% amplitudy składowej podstawowej i liczbą próbek od  $N = 32$  do  $N = 1024$ . Wnioski wyciągnięte z jakościowej analizy otrzymanych charakterystyk powtarzają się z tymi, które dotyczyły

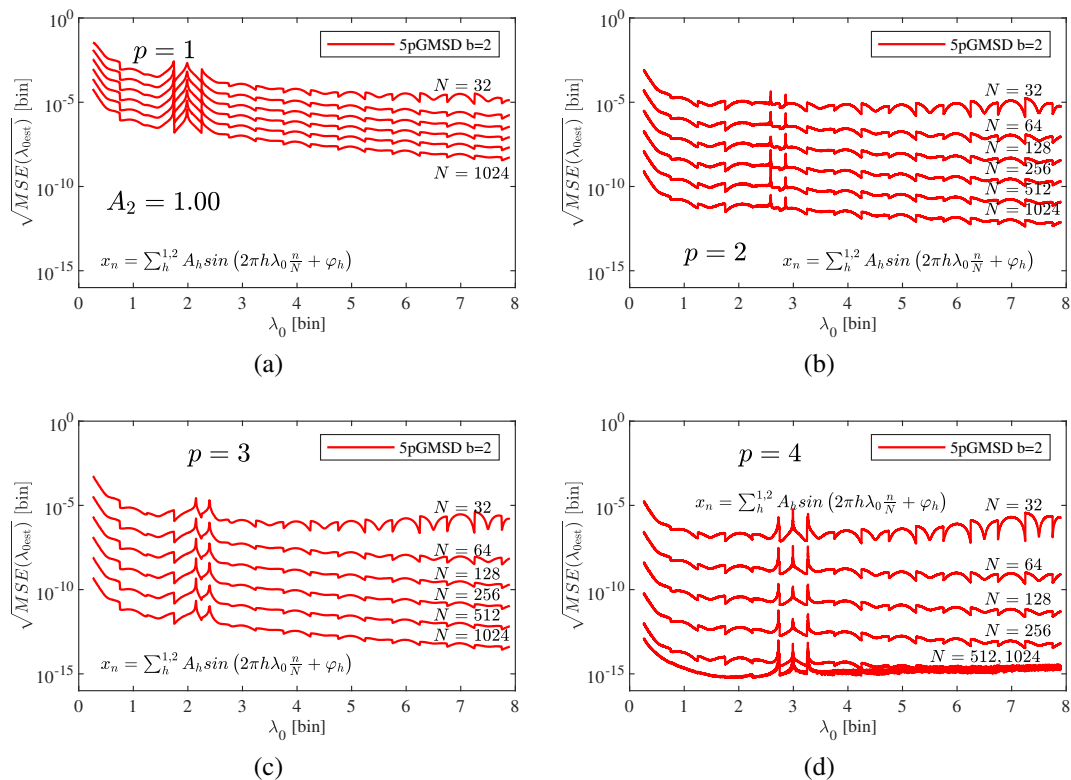


Rysunek 5.21. Charakterystyki błędu RMSE estymatora 5pGMSD ( $b = 2$ ) dla różnej liczby próbek  $N$  przedstawione w funkcji częstotliwości podstawowej  $\lambda_0$  w przypadku sygnału rzeczywistego zakłóconego drugą harmoniczną z amplitudą stanowiącą 0,1 wartości amplitudy składowej podstawowej.

metod 3pGMSD i 2pGMSD (odpowiednio rysunki 5.1 i 5.11). Na wykresach można zauważyć, że wraz ze wzrostem liczby próbek  $N$  sygnału wejściowego następuje zredukowanie wartości błędu RMSE, który wynika z obciążenia estymatora. Efekt jest potęgowany ze względu na zastosowanie większej wartości parametru  $p$  okna czasowego (wykresy od 5.21a do 5.21d). Dla parametru  $p = 4$  błąd RMSE jest mniejszy niż  $10^{-5}$  bin dla wszystkich badanych wartości liczby próbek  $N$ . Dla wartości  $N > 512$  na wszystkich wykresach wartość błędu także zmniejsza się poniżej wartości  $10^{-5}$  bin. Na wykresie 5.21d charakterystyki uzyskane dla wartości  $N = 512$  i  $N = 1024$  częściowo przyjmują odmienny kształt, który wynika z ograniczeń stosowanej arytmetyki zmiennoprzecinkowej.

Na rysunku 5.22 zostały przedstawione charakterystyki dla powtarzającego się scenariusza poprzedniej symulacji, ale ze zwiększoną wartością amplitudy drugiej harmonicznej  $A_2$  do 100% amplitudy składowej podstawowej  $A_1$ . Mimo dziesięciokrotnego zwiększenia wartości amplitudy składowej harmonicznej, wartość błędu nie wzrosła w znaczący sposób. Największa zmiana została zarejestrowana dla wartości parametru  $p = 1$  okna czasowego i jest związana z mniejszą regularnością kształtu charakterystyk błędu w porównaniu z estymacją sygnału zawierającego mniejszą wartością amplitudy drugiej składowej harmonicznej. Na wykresach można zauważyć miejsca zwiększonego błędu widoczne w postaci pojedynczych pików wartości RMSE, szczególnie w zakresie wartości częstotliwości  $1 < \lambda_0 < 3$  bin. Otrzymane wartości błędu nie różnią się jednak o więcej niż jeden rząd wielkości.

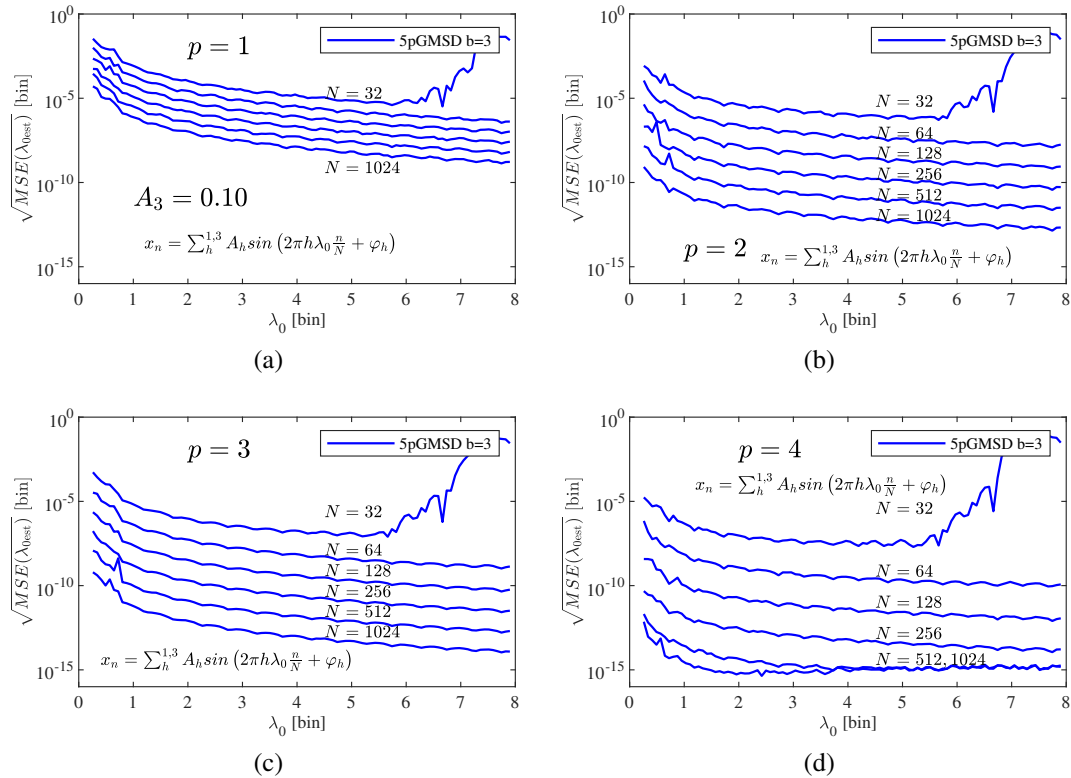
W sposób analogiczny jak dla rysunków 5.21 i 5.22 zostały wykonane symulacje dla



Rysunek 5.22. Charakterystyki błędu RMSE estymatora 5pGMSD ( $b = 2$ ) dla różnej liczby próbek  $N$  przedstawione w funkcji częstotliwości podstawowej  $\lambda_0$  w przypadku sygnału rzeczywistego zakłóconego **drugą harmoniczną** i amplitudą równą amplitudzie składowej podstawowej.

parametru  $b = 3$  metody pięciopunktowej. Charakterystyki błędu RMSE zostały przedstawione na rysunkach 5.23 i 5.24 dla sygnału złożonego z sinusoidy i trzeciej składowej harmonicznnej. Dla wszystkich wspomnianych rysunków charakterystyka błędu dla przypadku  $N = 32$  charakteryzuje się znaczącym zwiększeniem wartości błędu dla zakresu  $\lambda_0 > 5$  bin. Związane jest to z przybliżeniami przyjętymi przy wyprowadzaniu metody w rozdziale 4, wprowadzonymi przy zakładaniu postaci reprezentacji funkcji widma okna czasowego GMSD (aproxymacja zakładająca duże wartości parametru  $N$ ) oraz końcowej formuły metody 5pGMSD w rozdziale 4.5.2 (przybliżenia zakładające małe wartości parametru  $k$ ). Dla rejonu niskich wartości liczby próbek  $N$  i wysokich wartości indeksu  $k$  przyjęte przybliżenia powodują wzrost błędu, który jest znacząco większy od typowego poziomu obciążenia dla innych charakterystyk. Wystąpienie opisywanego efektu można przewidzieć za pomocą szacunkowej zależności dla  $\lambda_0$ , przyjmującej postać  $\lambda_0 \approx \frac{N}{8}$ .

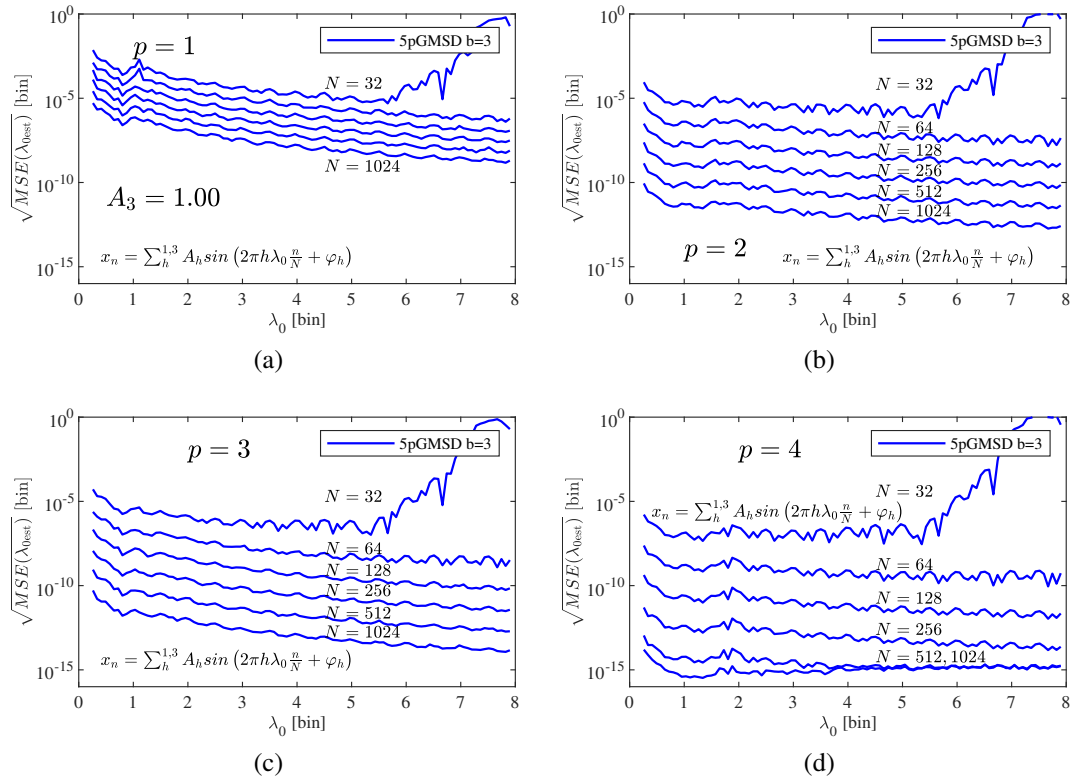
Na rysunku 5.23 zostały przedstawione charakterystyki błędu dla przypadku amplitudy trzeciej harmonicznnej stanowiącej 10% wartości amplitudy składowej podstawowej. Otrzymane wyniki jakościowo odpowiadają poprzedniemu analizowanemu przypadkowi z użyciem metody 5pGMSD z parametrem  $b = 2$  do eliminowania wpływu drugiej harmonicznnej (rysunek 5.21). Wraz ze wzrostem wartości użytej liczby próbek  $N$  wartość błędu RMSE zmniejsza się ze względu na malejący udział wartości obciążenia estymatora. Podobnie jak w przypadku parametru  $b = 2$ , największą redukcję błędu można uzyskać ze zwiększaniem wartości parametru  $p$  okna czasowego. Jest to widoczne na wykresach od 5.23a do 5.23d dla zwiększającej się wartości parametru  $p$  od 1 do 4. Co do zasady, w



Rysunek 5.23. Charakterystyki błędu RMSE estymatora 5pGMSD ( $b = 3$ ) dla różnej liczby próbek  $N$  przedstawione w funkcji częstotliwości podstawowej  $\lambda_0$  w przypadku sygnału rzeczywistego zakłóconego **trzecią harmoniczną** z amplitudą stanowiącą 0,1 wartości amplitudy składowej podstawowej.

porównaniu do wcześniejszego przypadku  $b = 2$ , wartości błędu RMSE są mniejsze ze względu na to, że trzecia składowa jest oddalona dwukrotnie dalej niż składowa druga od częstotliwości podstawowej  $\lambda_0$ . Bezwzględna różnica błędu jest jednak mała i w całym zakresie (oprócz rejonu zawierającego znaczący błąd wynikający z użycia przybliżeń w wyprowadzeniu) nie przekracza jednego rzędu wielkości.

Na rysunku 5.24 przedstawione zostały charakterystyki błędu dla przypadku amplitudy trzeciej harmoniczej stanowiącej 100% wartości amplitudy składowej podstawowej. Tak samo jak to było w przypadku parametru  $b = 2$  (rysunek 5.21 i 5.22), charakterystyki błędu RMSE zachowują podobny poziom jak dla dziesięciokrotnie mniejszej wartości amplitudy zakłócenia harmonicznego. Główna różnica zachodząca pomiędzy porównywanymi charakterystykami polega na lokalnych zmianach w kształcie, jednak wartości maksymalne błędów nie są znacząco większe. Na wykresach od 5.24a do 5.24d obszar wartości  $\lambda_0$ , dla których uzyskiwany jest znaczny przyrost błędów związany z zastosowanymi przybliżeniami jest podobny jak w przypadku estymacji sygnału z mniejszą wartością amplitudy (rysunek 5.23). Dokładność wyznaczenia wartości błędów dla charakterystyk w przypadku liczby próbek  $N = 512$ ,  $N = 1024$  i parametru  $p = 4$  ograniczona jest przez dokładność zastosowanej arytmetyki zmiennoprzecinkowej (dwie dolne charakterystyki widoczne na wykresie 5.24d).

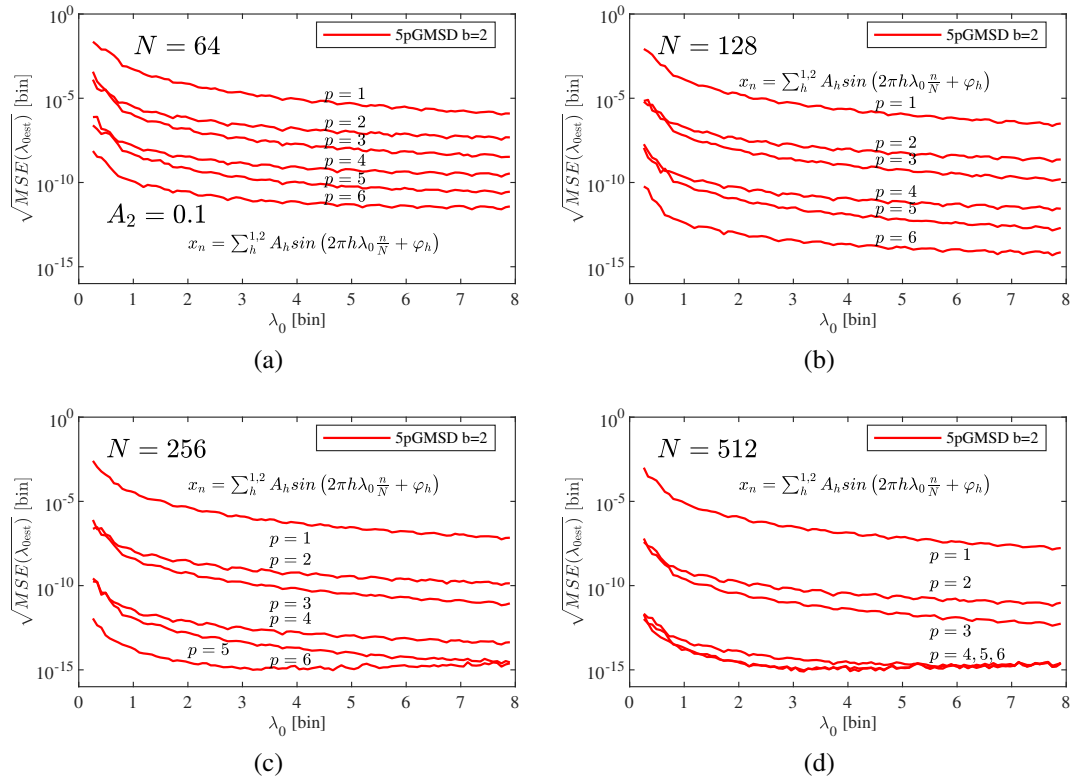


Rysunek 5.24. Charakterystyki błędu RMSE estymatora 5pGMSD ( $b = 3$ ) dla różnej liczby próbek  $N$  przedstawione w funkcji częstotliwości podstawowej  $\lambda_0$  w przypadku sygnału rzeczywistego zakłóconego **trzecią harmoniczną** i amplitudą równą amplitudzie składowej podstawowej.

### Wpływ wartości parametru $p$ okna czasowego na wartość obciążenia estymatora

Badania symulacyjne przeprowadzone w kolejnej części rozdziału skupiają się na zbadaniu wpływu wartości parametru  $p$  okna czasowego na dokładność otrzymanego pomiaru w zbliżonym scenariuszu jak w przypadku badań, których wyniki zostały zaprezentowane na rysunkach od 5.21 do 5.24. Charakterystyki błędu RMSE przedstawione na rysunkach 5.25, 5.26, 5.27 i 5.28 zostały wygenerowane dla sześciu kolejnych wartości parametru  $p \in \{1, \dots, 6\}$ . Sygnał wejściowy składa się z sygnału sinusoidalnego i jego jednej harmonicznej niskiego rzędu bez obecności zakłóceń losowych. Na przedstawionych rysunkach pokazano charakterystyki błędu dla dwóch wartości parametrów metody 5pGMSD ( $b = 2$  i  $b = 3$ ) oraz dla dwóch wartości amplitudy składowej harmonicznej ( $A_b = 0,1$  i  $A_b = 1$  względem składowej podstawowej). Każdy z rysunków 5.25-5.28 zawiera cztery wykresy dla czterech wartości liczby próbek  $N \in \{64, 128, 256, 512\}$  i dla zakresu częstotliwości podstawowej  $\lambda_0 \in [0, 8]$  bin.

Na rysunku 5.25 zostały przedstawione charakterystyki błędu RMSE dla przypadku braku szumu i sygnału zawierającego drugą harmoniczną z wartością amplitudy równą 10% amplitudy składowej podstawowej. Estymacja częstotliwości realizowana jest z użyciem równań metody 5pGMSD z parametrem  $b = 2$ . Na każdym z czterech wykresów dla ustalonego parametru  $N$  przedstawione zostały charakterystyki błędu dla sześciu kolejnych wartości parametru  $p = 1, \dots, 6$ . Wartość błędu estymacji w rozważanym przypadku maleje wraz ze wzrostem wartości parametru  $p$  okna czasowego, przy czym różnica przy jednostkowym wzroście wartości parametru okna jest większa dla przypadku przejścia do

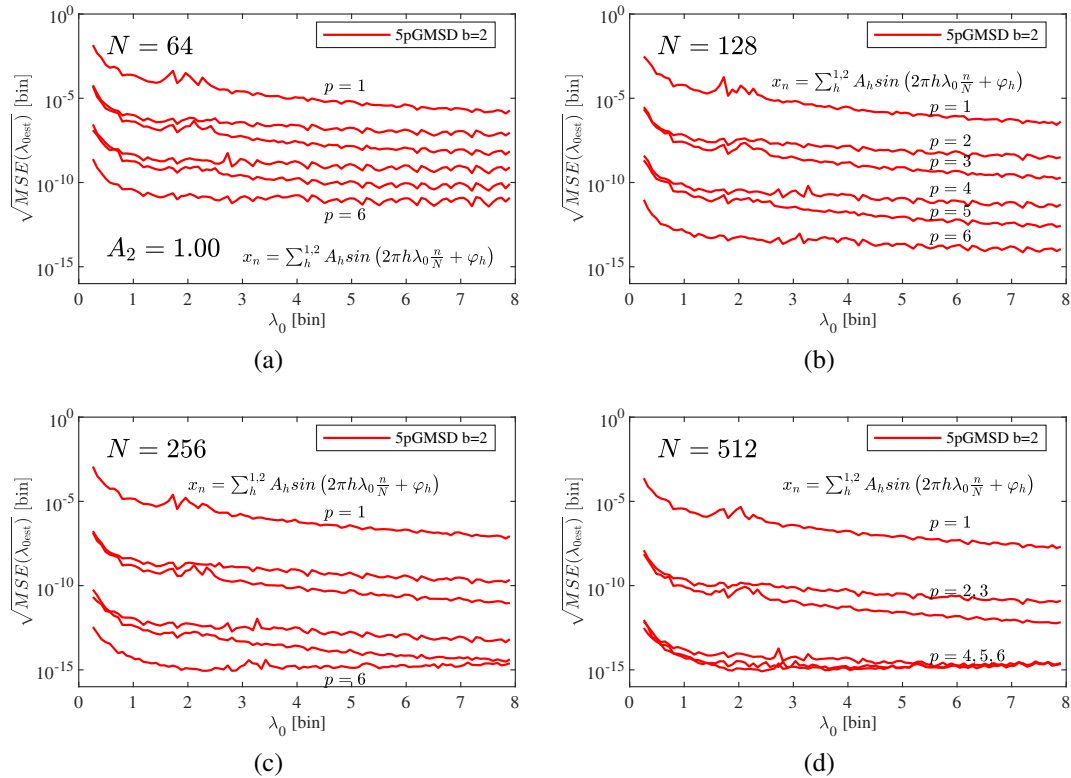


Rysunek 5.25. Charakterystyki błędu RMSE estymatora 5pGMSD ( $b = 2$ ) dla kolejnych wartości parametru  $p$  przedstawione w funkcji częstotliwości podstawowej  $\lambda_0$  w przypadku sygnału rzeczywistego zakłóconego **drugą harmoniczną** i amplitudzie stanowiącej 10% amplitudy składowej podstawowej.

wartości parzystych niż zmiana do wartości nieparzystych. Omawiany efekt pogłębia się, skutkując większymi różnicami błędów dla zwiększających się wartości liczby próbek  $N$  sygnału wejściowego, co widać dla charakterystyk umieszczonych na wykresach od 5.25a do 5.25d. Wykorzystanie parametru  $p = 2$  pozwala na redukcję wartości błędów z obciążeniem do wartości poniżej  $10^{-5}$  bin dla każdej rozpatrywanej liczby próbek. Charakterystyki dla przypadku  $N = 512$  i wartości parametru  $p > 3$  przyjmują odmienny kształt ze względu na ograniczoną dokładność obliczeń wykorzystywanej arytmetyki (trzy dolne charakterystyki na wykresie 5.25d).

Na rysunku 5.26 zostały przedstawione charakterystyki uzyskane przy wprowadzeniu zwiększonej wartości amplitudy drugiej składowej harmoniczej do poziomu wartości 100% amplitudy składowej podstawowej ( $A_b = 1$ ). Otrzymane charakterystyki błędów cechują się zwiększoną nieregularnością kształtu w porównaniu z mniejszą amplitudą zakłócenia harmonicznego  $A_b = 0,1$  (rysunek 5.25). Lokalne skoki wartości błędów RMSE są szczególnie zauważalne dla wartości częstotliwości podstawowej  $\lambda_0 < 3$  i dalej zmniejszają się wraz ze wzrostem częstotliwości  $\lambda_0$ . Mimo zwiększenia wartości amplitudy dziesięciokrotnie, w całym zakresie nie występuje wzrost wartości błędów o więcej niż jeden rząd wielkości.

Na rysunku 5.27 zostały przedstawione charakterystyki błędów RMSE dla przypadku sygnału zawierającego trzecią składową harmoniczną o amplitudzie równej 10% amplitudy składowej podstawowej bez szumu. Estymacja częstotliwości realizowana jest z użyciem równań metody 5pGMSD i z przyjętym parametrem  $b = 3$ , tj. z eliminacją wpływu trze-

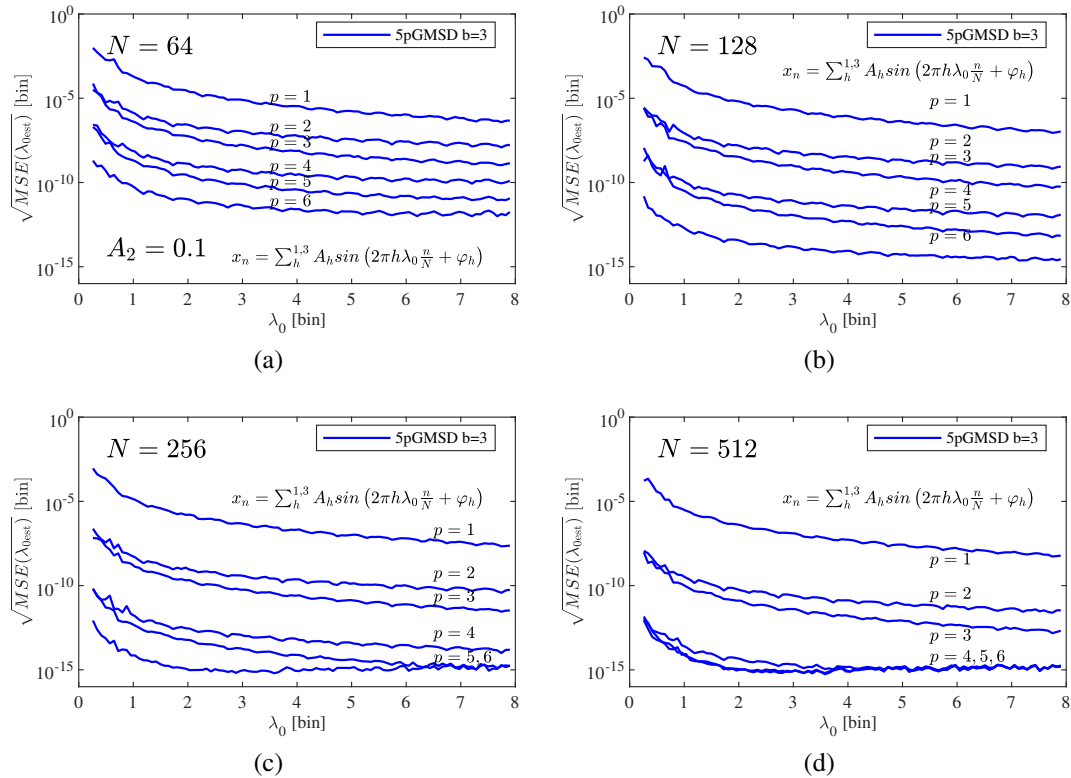


Rysunek 5.26. Charakterystyki błędu RMSE estymatora 5pGMSD ( $b = 2$ ) dla kolejnych wartości parametru  $p$  przedstawione w funkcji częstotliwości podstawowej  $\lambda_0$  w przypadku sygnału rzeczywistego zakłóconego **drugą harmoniczną** z amplitudą równą amplitudzie składowej podstawowej.

kiej harmonicznej. Na każdym z czterech wykresów dla ustalonego parametru  $N$  zostały przedstawione charakterystyki błędu dla sześciu kolejnych wartości parametru  $p = 1, \dots, 6$ . Tak samo jak dla przypadku obecności drugiej harmonicznej, wartość błędu estymacji maleje wraz ze wzrostem wartości parametru  $p$  okna czasowego, przy czym różnica w błędzie uzyskana dla inkrementacji wartości parametru okna jest większa dla przypadku przejścia do wartości parzystych niż zmiana w kierunku wartości nieparzystych. Omawiany efekt pogłębia się, skutkując w większych różnicach błędu dla zwiększania wartości próbek  $N$  sygnału wejściowego. Wpływ obecności harmonicznej trzeciego rzędu na dokładność estymacji jest mniejszy niż w przypadku składowej rzędu drugiego, gdy rozpatrywane są takie same amplitudy. Wynika to bezpośrednio z większej odległości pomiędzy użytymi prążkami widma w estymacji a położeniem składowej widmowej. Wraz ze zwiększaniem wartości  $\lambda_0$  na wykresach, charakterystyki błędu RMSE opadają szybciej. Widać to w przypadku charakterystyki błędu dla liczby próbek  $N = 512$  i wartości parametru  $p = 2$ , gdzie wartość błędu zmniejsza się poniżej poziomu  $10^{-10}$  bin dla częstotliwości podstawowej  $\lambda_0 = 4$  bin (przez porównanie wykresów 5.25d i 5.27d). Dla częstotliwości  $\lambda_0 > 1$  bin wykorzystanie parametru  $p = 2$  pozwala na redukcję wartości błędu związanego z obciążeniem do wartości poniżej  $10^{-5}$  bin dla każdej rozpatrywanej liczby próbek. Dla przypadku liczby próbek  $N = 256$  oraz  $N = 512$  otrzymane wykresy przyjmują odmienny kształt ze względu na ograniczoną dokładność obliczeń (wykres 5.27d).

Na rysunku 5.28 zostały umieszczone charakterystyki błędu RMSE uzyskane dla zwiększonej wartości amplitudy trzeciej harmonicznej do wartości 100% wartości amplitudy



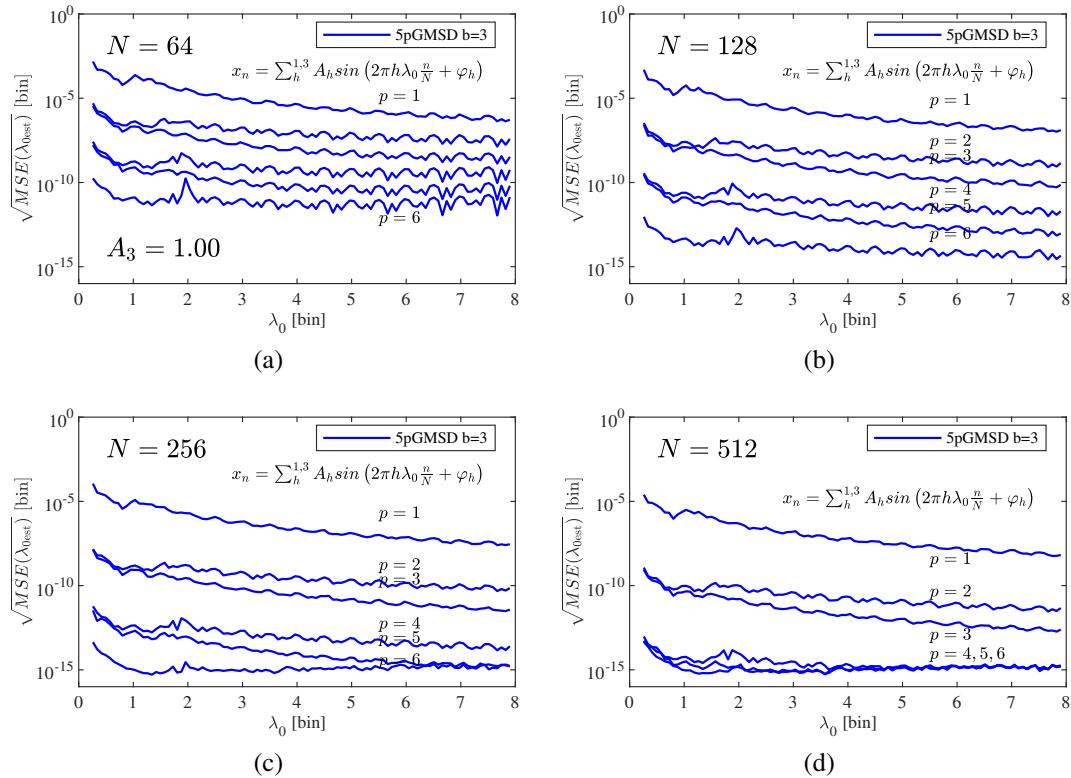


Rysunek 5.27. Charakterystyki błędu RMSE estymatora 5pGMSD ( $b = 3$ ) dla kolejnych wartości parametru  $p$  przedstawione w funkcji częstotliwości podstawowej  $\lambda_0$  w przypadku sygnału rzeczywistego zakłóconego **trzecią harmoniczną** i amplitudzie stanowiącej 10% amplitudy składowej podstawowej.

składowej podstawowej ( $A_b = 1$ ). Charakterystyki błędu RMSE cechują się zwiększoną nieregularnością kształtu w porównaniu do charakterystyk uzyskanych dla  $A_b = 0.1$ . Zaobserwowany efekt jest jednak mniejszy niż w przypadku analizy wpływu obecności drugiej harmonicznej na błąd. Zwiększenie amplitudy dziesięciokrotnie nie powoduje zwiększenia wartości błędu o więcej niż jeden rząd wielkości dla rozpatrywanych parametrów pomiaru. Przykładowo, dla wartości parametru okna czasowego  $p = 2$  wartości błędu pozostają mniejsze niż  $10^{-5}$  bin, tak jak dla przypadku mniejszej amplitudy zakłócenia (rysunki 5.27 i 5.28).

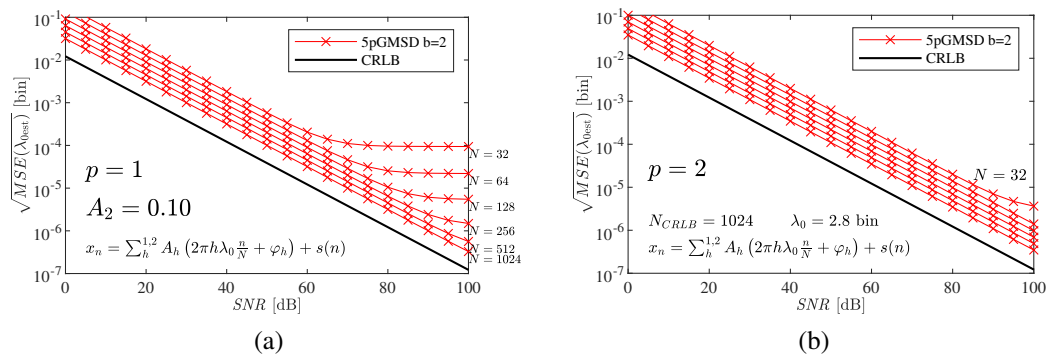
### Wpływ zakłóceń losowych na dokładność metody pięciopunktowej

Ocena odporności na szum estymatora pięciopunktowego GMSD została przeprowadzona przy zachowaniu metodologii wykorzystanej dla oceny dokładności estymatorów 3pGMSD i 2pGMSD (rysunki 5.3 i 5.13). Symulacje wykorzystują sygnał wejściowy złożony z rzeczywistej składowej sinusoidalnej i rzeczywistej składowej harmonicznej niskiego rzędu i szumu AWGN. Obecność szumu w sygnale wejściowym powoduje, że uzyskiwana wartość błędu całkowitego RMSE zwiększa się w porównaniu do przypadku bez szumu, ze względu na wartość wariancji estymatora (zależność (5.1)). Na rysunku 5.29 zostały przedstawione charakterystyki błędu RMSE w funkcji wartości współczynnika SNR dla przedziału  $[0,100]$  dB w przypadku obecności drugiej składowej harmonicznej i użycia parametru metody  $b = 2$ . Amplituda składowej harmonicznej wynosi 0,1 wartości amplitudy składowej podstawowej. Wykorzystywana jest przy tym ustalona wartość częstotliwości

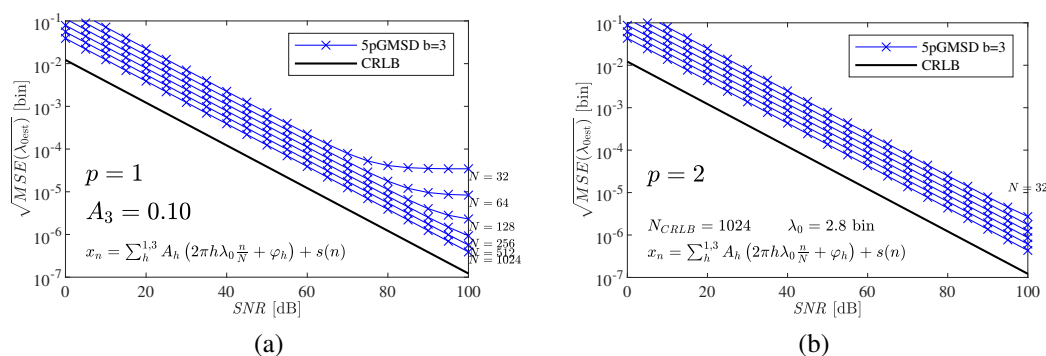


Rysunek 5.28. Charakterystyki błędu RMSE estymatora 5pGMSD ( $b = 3$ ) dla kolejnych wartości parametru  $p$  przedstawione w funkcji częstotliwości podstawowej  $\lambda_0$  w przypadku sygnału rzeczywistego zakłóconego **trzecią harmoniczną** z amplitudą równą amplitudzie składowej podstawowej.

podstawowej  $\lambda_0 = 2,8$  bin. Na wykresach zostały przedstawione charakterystyki błędu RMSE dla kolejnych wartości liczby próbek  $N$  będącej potęgą dwójki, rozpoczynając od wartości  $N = 32$  aż do  $N = 1024$ . Wykorzystane zostały parametry okna  $p = 1$  dla wykresu 5.29a oraz  $p = 2$  dla wykresu 5.29b. Czarną linią oznaczono wartości ograniczenia Craméra-Rao dla przypadku estymatorów częstotliwości pojedynczej oscylacji zespolonej (równanie (2.2)). W przypadku użycia parametru  $p = 1$  charakterystyki dla liczby próbek  $N < 512$  wykazują zmianę dynamiki uzyskiwanej dokładności. Na wykresie 5.29a objawia się to w postaci występowania regionu przejściowego pomiędzy wartościami opadającymi w sposób liniowy a wartościami stałymi. Podobnie jak w poprzednio omawianych przypadkach, ma to związek ze zmianą dominacji składnika błędu wynikającego z zakłóceń losowych nad obciążeniem w ujęciu błędu całkowitego. Dla charakterystyki z liczbą próbek  $N = 32$  ten region jest położony w okolicach wartości SNR  $> 70$  dB i dla kolejnych wartości  $N$  przesuwa się w stronę większych wartości SNR. Dla charakterystyk z liczbą próbek  $N > 512$  ten region jest położony poza badanym obszarem wartości SNR. Drugi z przedstawionych wykresów 5.29b został uzyskany dla przypadku z użyciem parametru  $p = 2$  z charakterystykami błędu, dla których w całym badanym zakresie wartości SNR dominuje błąd związany obecnością zakłóceń losowych, z wyłączeniem charakterystyki dla  $N = 32$ . Objawia się to w liniowym kształcie uzyskanych charakterystyk. Dla wartości  $N = 32$ , region zmiany nachylenia charakterystyki widać dla wartości SNR  $\approx 100$  dB. Tak jak dla parametru  $p = 1$ , poziom błędu RMSE w rejonie stałych wartości z dominacją obciążenia pokrywa się z wartościami otrzymanymi dla przypadku bez uwzględniania



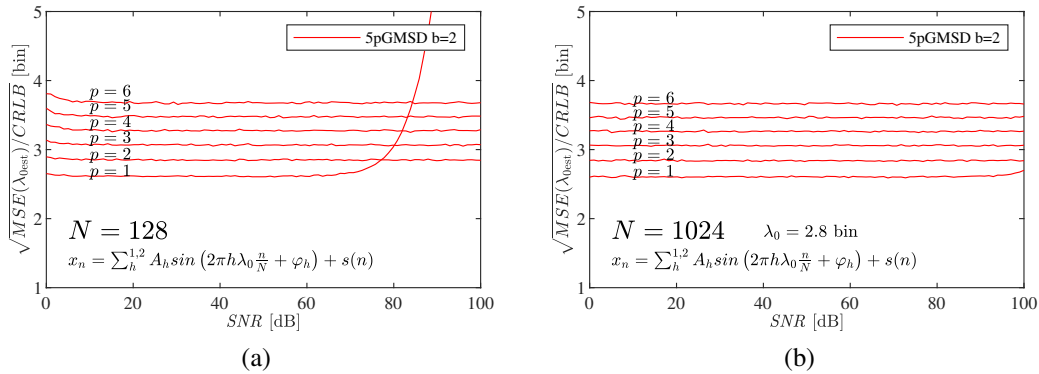
Rysunek 5.29. Błąd RMSE ze względu na wartość SNR sygnału dla różnych wartości liczby próbek  $N$  sygnału.



Rysunek 5.30. Błąd RMSE ze względu na wartość SNR sygnału dla różnych wartości liczby próbek  $N$  sygnału.

szumu (rysunki 5.21-5.28).

Na rysunku 5.30 zostały przedstawione charakterystyki błędu RMSE dla przypadku obecności trzeciej składowej harmonicznej i wykorzystania parametru metody pięciopunktowej  $b = 3$ . Amplituda trzeciej harmonicznej wynosi 0,1 wartości amplitudy składowej podstawowej. Wykorzystane zostały parametry okna  $p = 1$  dla wykresu 5.30a oraz  $p = 2$  dla wykresu 5.30b. Czarną linią oznaczono wartości ograniczenia Craméra-Rao dla przypadku estymatorów częstotliwości pojedynczej oscylacji zespolonej. Poziomy błąd dla regionu SNR dominacji wariancji nad obciążeniem są podobne jak dla przypadku parametru  $b = 2$  oraz obecności drugiej harmonicznej (rysunek 5.29). Z kolei poziomy błąd RMSE dla regionu SNR dominacji obciążenia nad wariancją jest zauważalnie mniejszy i odpowiada wartościom błędów uzyskiwanym w symulacjach dla przypadku sygnału niezakłóconego szumem (rysunki 5.21-5.28). Dla charakterystyki z liczbą próbek  $N = 32$  region zmiany nachylenia można zaobserwować w okolicach wartości SNR = 80 dB i dla kolejnych wartości  $N$  ten punkt przesuwa się w stronę większych wartości SNR. Dla charakterystyk z liczbą próbek  $N > 64$  ten region jest położony poza badanym obszarem wartości SNR. Dla drugiego z przedstawionych wykresów 5.30b (wartość parametru  $p = 2$ ) wszystkie przedstawione charakterystyki cechują się stałym nachyleniem, a więc dla całego zakresu wartości SNR wartość obciążenia jest zredukowana znacząco poniżej poziomu błędu wynikającego z wariancji.

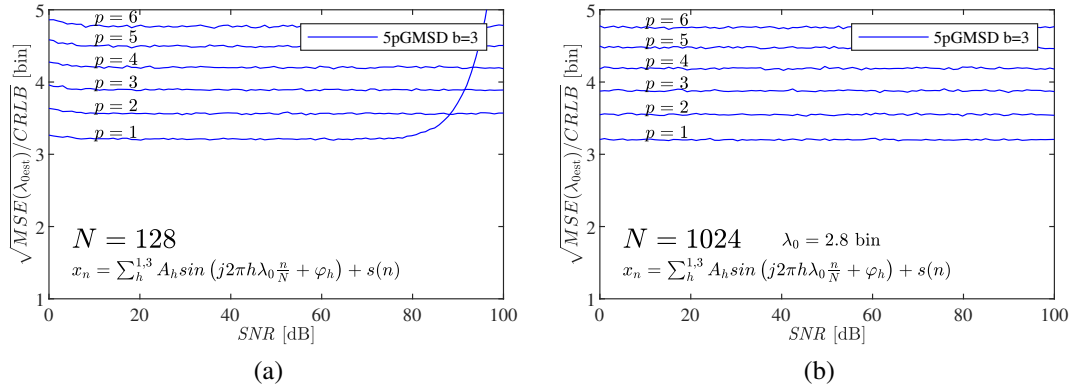


Rysunek 5.31. Błąd RMSE odniesiony do ograniczenia Craméra-Rao ze względu na wartość SNR sygnału dla różnych wartości parametru  $p$  okna czasowego.

### Charakterystyki błędu RMSE w odniesieniu do granicy Craméra-Rao ze względu na użyty parametr okna

Rysunek 5.31 prezentuje charakterystyki błędu RMSE dla sześciu kolejnych wartości parametru okna czasowego  $p = 1, \dots, 6$  i dla przypadku dwóch wartości liczby próbek  $N = 128$  i  $N = 1024$ . Sygnał wejściowy zakłócony jest obecnością drugiej harmonicznej, zaś estymacja realizowana jest z wyborem parametru  $b = 2$  dla metody 5pGMSD. Wartości błędu przedstawione na rysunku odniesione są do wartości ograniczenia Craméra-Rao dla rozważanej liczby próbek  $N$ . Na wykresie 5.31a zostały umieszczone charakterystyki błędu dla liczby próbek  $N = 128$  sygnału dla zmiany wartości parametru okna. Charakterystyka błędu uzyskana dla parametru  $p = 1$  charakteryzuje się skokowym wzrostem błędu, który występuje wraz z przekroczeniem wartości współczynnika  $\text{SNR} = 70$  dB, co świadczy o tym, że błąd związany z obciążeniem estymatora zaczyna dominować w ujęciu błędu całkowitego. Na wykresie 5.31b zostało pokazane, że zwiększenie liczby próbek estymowanego sygnału nie wpływa na uzyskiwaną wartość błędu odniesionego do ograniczenia Craméra-Rao związanego z występowaniem zakłóceń losowych. Jednak zwiększenie liczby próbek sygnału do  $N = 1024$  pozwala na ograniczenie poziomu obciążenia estymatora znacznie poniżej poziomu błędu związanego z obecnością zakłóceń losowych, co pozwoliło na eliminację efektu skokowej zmiany błędu odniesionego do ograniczenia Craméra-Rao przy użyciu parametru  $p = 1$  w badanym zakresie wartości współczynnika  $\text{SNR} \approx 90$  dB.

Na rysunku 5.32 zostały przedstawione wyniki dla przypadku sygnału zawierającego trzecią harmoniczną i parametru metody 5pGMSD  $b = 3$ . Tak jak dla charakterystyk uzyskanych na rysunku 5.31, także i tutaj zostały zastosowane dwie liczby próbek  $N = 128$  i  $N = 1024$ . Stąd też wnioski sformułowane przy okazji omawiania rysunku 5.31 mają potwierdzenie w przypadku estymacji sygnału zawierającego trzecią harmoniczną. Ze względu na to, że błąd systematyczny w tym przypadku jest mniejszy, wartość współczynnika  $\text{SNR}$ , dla którego zaczyna dominować obciążenie, przesuwa się do wartości ok. 80 dB, dla przypadku zastosowania  $N = 128$  próbek (rysunek 5.32a). W przypadku większej liczby próbek  $N = 1024$ , w całym badanym zakresie przeważa błąd wynikający z obecności zakłóceń losowych (rysunek 5.32b). Uzyskane wartości błędu są ok. 30% większe niż w przypadku zastosowania parametru  $b = 2$ .



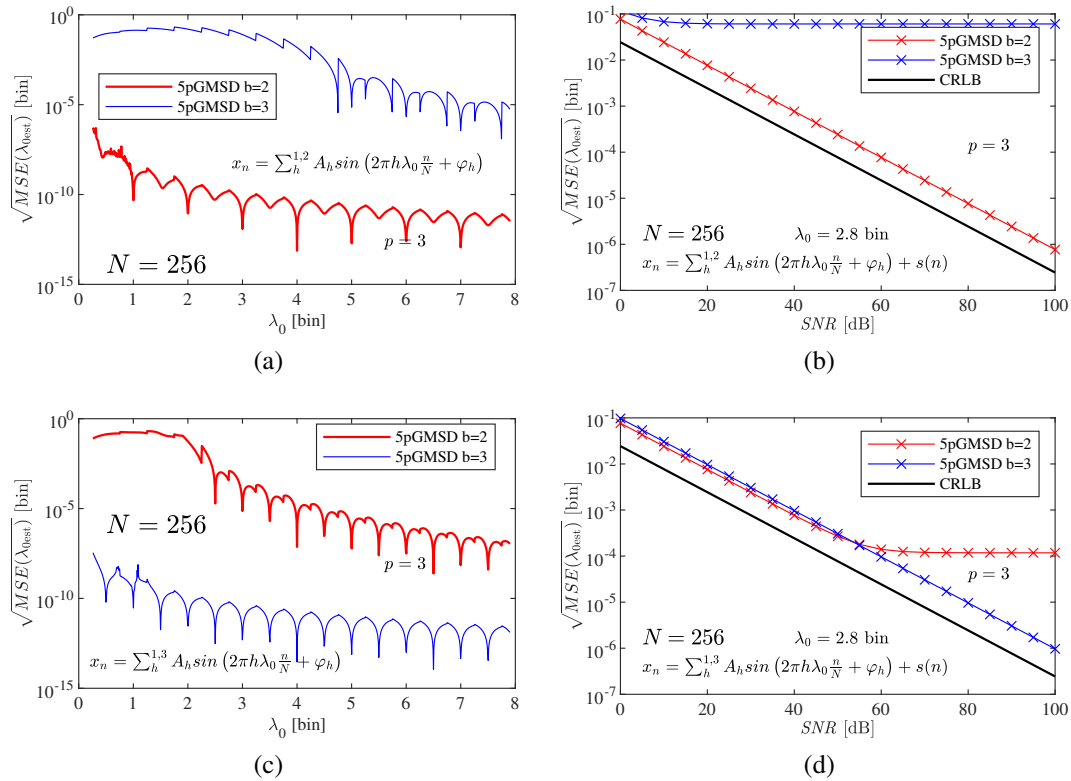
Rysunek 5.32. Błąd RMSE odniesiony do ograniczenia Craméra-Rao ze względu na wartość SNR sygnału dla różnych wartości parametru  $p$ .

### Wpływ nieuwzględnianej w modelu bliskiej harmonicznej na dokładność estymacji metody pięciopunktowej

Na rysunku 5.33 zostały przedstawione wyniki uzyskane z wykorzystaniem dwóch wariantów metody 5pGMSD, z dwoma wartościami parametru  $b = 2$  i  $b = 3$  i z parametrem okna  $p = 3$ . Estymacja częstotliwości  $\lambda_0$  jest realizowana dla sygnału zawierającego drugą harmoniczną (wykres 5.33a i 5.33b) oraz dla sygnału zawierającego trzecią harmoniczną (wykres 5.33c i 5.33d). Liczba próbek wejściowych ustalona jest na  $N = 256$ , zaś amplituda składowej harmonicznej stanowi 10% wartości amplitudy składowej podstawowej.

Na wykresie 5.33a pokazano charakterystyki błędu RMSE dla sygnału bez zakłóceń losowych, w przypadku obecności drugiej harmonicznej w sygnale. Wyniki dla estymacji z parametrem  $b = 2$  pokrywają się z wynikami otrzymanymi we wcześniejszych symulacjach (m. in. na rysunku 5.21). Wybór parametru o wartości innej niż wartość rzędu harmonicznej faktycznie obecnej w sygnale skutkuje w zwiększeniu poziomu błędu RMSE do poziomu estymacji bez eliminacji wpływu składowej harmonicznej. Wartości błędu dla przypadku  $b = 3$  nie zmniejszają się poniżej wartości  $10^{-3}$  bin dla zakresu częstotliwości  $\lambda_0 < 4$  bin, gdzie w przypadku wyboru parametru  $b = 2$  wartość błędu zmniejsza się poniżej wartości  $10^{-10}$  bin dla  $\lambda_0 = 4$  bin. Na wykresie 5.33b zostały przedstawione wyniki dla przypadku sygnału zakłóconego szumem. O ile uzyskiwane wartości błędu dla przypadku eliminacji drugiej harmonicznej  $b = 2$  pozwalają na eliminację obciążenia poniżej poziomu błędu związanego z obecnością zakłóceń losowych, o tyle wybór parametru  $b = 3$  skutkuje wystąpieniem dominacji obciążenia dla całego badanego zakresu wartości SNR.

Na wykresach 5.33c i 5.33d przedstawiono wyniki badań dla trzeciej harmonicznej obecnej w sygnale. Charakterystyki przedstawione na wykresie 5.33c pozwalają na ocenę błędu dla estymacji z niepoprawnie dobranym parametrem estymacji  $b = 2$ . Ze względu na większe oddalenie trzeciej składowej w widmie, co za tym idzie jej mniejszy wpływ na wartości prążków DFT zakładając tę samą wartość amplitudy, poziom obciążenia widoczny na wykresie jest odpowiednio mniejszy w porównaniu do wartości błędów uzyskanych dla estymacji sygnału zawierającego drugą harmoniczną (wykres 5.33a). Mniejsze obciążenie przekłada się na zmienione charakterystyki błędu, które są widoczne na wykresie 5.33d, gdzie rejon dominacji błędu obciążenia metody przesuwają się do wartości SNR  $> 50$  dB.

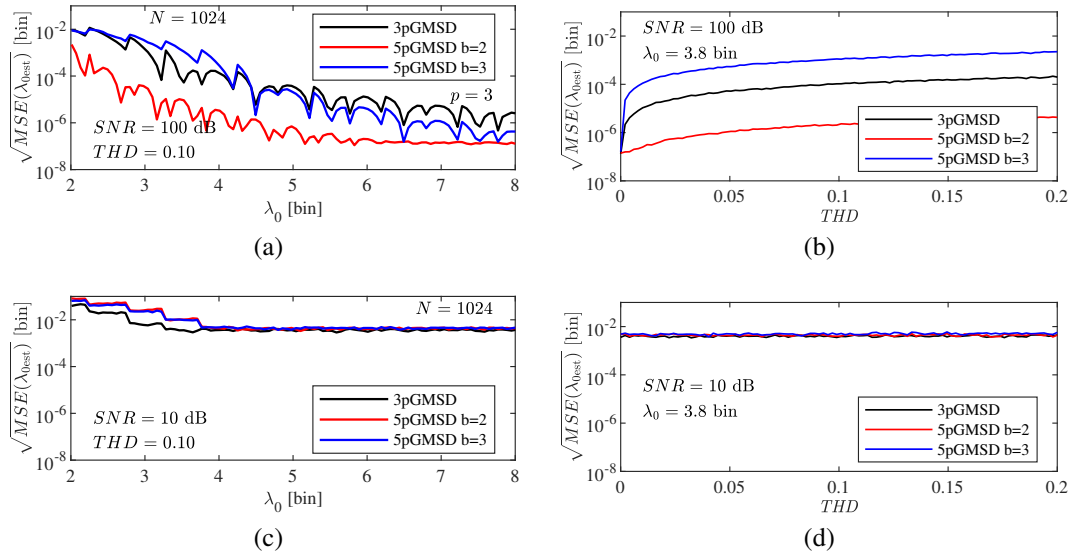


Rysunek 5.33. Porównanie błędów metody 5pGMSD dla dwóch różnych wartości parametru  $b = 2$  i  $b = 3$  w przypadku sygnału sinusoidalnego zakłóconego **drugą harmoniczną** na wykresach (a) i (b) oraz **trzecią harmoniczną** na wykresach (c) i (d).

### Wpływ obecności wielu harmonicznych na dokładność estymacji

W celu oceny efektywności metody pięciopunktowej 5pGMSD w praktycznym zastosowaniu, zostały przeprowadzone badania dla przypadku sygnału zakłóconego ośmioma kolejnymi harmonicznymi z wartościami amplitud opisany w tabeli 5.1. Na rysunku 5.34 zostały przedstawione charakterystyki błędu RMSE dla przypadku niskiego poziomu szumu na wykresach 5.34a i 5.34b (SNR = 100dB) oraz dla wysokiego poziomu szumu na wykresach 5.34c i 5.34d (SNR = 10 dB). Porównane zostały metoda 5pGMSD z parametrami  $b = 2$  i  $b = 3$  oraz metoda trzypunktowa 3pGMSD. Zastosowane okno czasowe przyjmuje parametr  $p = 3$ .

Na wykresie 5.34a zostały przedstawione charakterystyki błędu RMSE dla przypadku sygnału ze stałą wartością współczynnika zakłóceń THD = 0,1 oraz poziomem szumu SNR = 100 dB dla zakresu częstotliwości podstawowej  $\lambda_0 \in [2,8]$  bin. Otrzymany błąd całkowity jest najmniejszy w całym badanym zakresie dla metody pięciopunktowej z eliminacją wpływu drugiej harmonicznej  $b = 2$  i stabilizuje się na poziomie  $10^{-7}$  bin dla  $\lambda_0 > 5$  bin. Estymacja za pomocą metody trzypunktowej skutkuje otrzymaniem lepszych rezultatów niż przy pomocy metody pięciopunktowej z eliminacją wpływu trzeciej harmonicznej ( $b = 3$ ) dla zakresu  $\lambda_0 < 4,5$  bin i odwrotnie, dla większych wartości  $\lambda_0$  lepsze rezultaty daje metoda pięciopunktowa z parametrem  $b = 3$ . Na wykresie 5.34b pokazano wartości błędu dla ustalonej wartości częstotliwości  $\lambda_0$  i zwiększającego się poziomu zakłóceń harmonicznych wyrażonych przez współczynnik THD. W całym rozważanym zakresie wartości współczynnika THD najlepsze rezultaty zostały otrzymane w przypadku zastosowania metody 5pGMSD z eliminacją wpływu drugiej harmonicznej  $b = 2$ . Jest



Rysunek 5.34. Porównanie błędów metody 5pGMSD dla przypadku występowania **wielu składowych harmonicznych** w sygnale o amplitudach określonych w tabeli 5.1. Rozpatrywane są dwa przypadki: dla wykresów (a) i (b) wykorzystywany jest sygnał z niskim poziomem zaszumienia ( $SNR=100$  dB), z kolei dla wykresów (c) i (d) z wysokim poziomem zaszumienia ( $SNR=10$  dB).

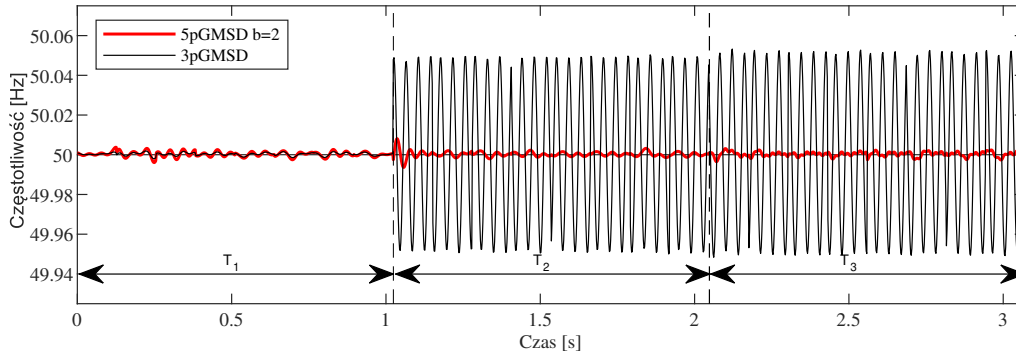
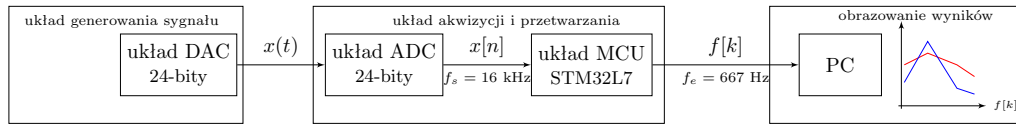
to związane z tym, że największy wpływ na dokładność estymacji ma druga składowa harmoniczna. Ze względu na wybór częstotliwości  $\lambda_0 = 3,8$  bin (która znajduje się w obszarze  $\lambda_0 < 4,5$  bin, czyli przewagi metody trzypunktowej 3pGMSD nad wariantem metody pięciopunktowej  $b = 3$ ) wartość błędu całkowitego w przypadku metody 5pGMSD, z parametrem  $b = 3$ , jest większa niż dla metody 3pGMSD dla całego badanego zakresu.

Dla charakterystyk błędu widocznych na wykresach 5.34c i 5.34d, dla sygnału z wysokim poziomem szumu ( $SNR = 10$  dB), dominuje błąd wynikający z obecności zakłóceń losowych. Stąd dla wszystkich rozpatrywanych estymatorów wartość błędu całkowitego osiąga zbliżone wartości w całym rozpatrywanym zakresie parametrów. Stąd także wynika brak zmiany wartości błędu przy zwiększającym się poziomie zakłóceń harmonicznych.

## 5.6 Wyniki eksperymentalne

W niniejszym rozdziale został opisany eksperyment zakładający weryfikację poprawności działania algorytmu 5pGMSD (w wariancie  $b = 2$ ) do eliminacji wpływu obecności składowych harmonicznych w praktycznym systemie. Implementacja algorytmu została zrealizowana w języku C dla systemu wbudowanego i wykorzystana w celu oceny przydatności do zastosowania w aplikacji z ograniczeniami czasowymi. Eksperyment zakłada przeprowadzenie pomiaru częstotliwości i przedstawienie zarejestrowanych wartości pomiarowych w postaci charakterystyk. Pomiar jest przeprowadzony z użyciem badanego algorytmu w przypadku występowania zakłóceń harmonicznych w sygnale.

Na wejściu toru pomiarowego występuje układ generowania sygnału wyposażony w 24-bitowy układ CODEC ALC1200, który jest bezpośrednio podłączony za pomocą przewodu sygnałowego do płytki wyposażonej w 24-bitowy przetwornik analogowo-cyfrowy z układem WM8994. Próbki cyfrowe przesyłane są dalej do układu cyfrowego kontrolera sygnałów (DSC, ang. *digital signal controler*) rodziny STM32L7 z rdzeniem Cortex M-7.



Rysunek 5.35. Schemat blokowy eksperymentu oraz wykres zmierzonej wartości częstotliwości w funkcji czasu dla trzech kolejnych sygnałów wejściowych: i) okres  $T_1$ , sygnał sinusoidalny z amplitudą  $A_1 = 1$ , ii) okres  $T_2$ , sinusoida z drugą harmoniczną  $A_2 = 0,075$  jest dodana do sygnału, iii) w okresie  $T_3$  trzecia harmoniczna  $A_3=0,185$  jest dodana do sygnału. Wartość  $THD$  ostatniego sygnału wynosi 0,2.

Aplikacja mikrokontrolera wykonuje obliczenia FFT oraz obliczenia dla algorytmów interpolacji widma 5pGMSD i 3pGMSD w celu estymacji wartości częstotliwości z użyciem formuły (4.42) oraz formuły (4.77). Częstotliwość podstawowa sygnału wynosi 50 Hz, a częstotliwość próbkowania przetwornika wynosi  $f_s = 16000$  Hz. Estymacja jest wykonywana dla  $N = 1024$  próbek sygnału i parametru okna czasowego GMSD  $p = 4$ . Ustalone parametry przekładają się na wartość unormowaną częstotliwości podstawowej wynoszącą  $\lambda_0 = 3,2$  bin. W generowanym sygnale zmienia się zawartość składowych harmonicznym w czasie, w trzech etapach trwających  $T_x = 1,024$  s każdy. Zmiana wartości amplitud składowych harmonicznym jest realizowana skokowo. W pierwszym etapie (okres  $T_1$ ) generowany jest sygnał sinusoidalny. W drugim etapie (okres  $T_2$ ) dodana do sygnału zostaje druga harmoniczna z amplitudą o wartości  $A_2 = 0,075$  względem wartości składowej podstawowej. W ostatnim etapie (okres  $T_3$ ) zostaje dodana trzecia harmoniczna w taki sposób, aby zwiększyć poziom zakłóceń harmonicznym do wartości współczynnika  $THD = 0,2$ , oraz tak aby stosunek amplitud  $A_2:A_3$  wynosił 2:5 (zgodnie z wartościami w tabeli 5.1). Estymacja częstotliwości dla sygnału wejściowego przeprowadzona jest dla metody 5pGMSD z parametrem  $b = 2$  i metody 3pGMSD w celu porównania. Wynikowe charakterystyki zmierzonej częstotliwości zostały przedstawione na rysunku 5.35.

Na otrzymanych wykresach pokazano, że w przypadku estymacji częstotliwości sinusoidy maksymalny błąd dla obu badanych metod nie przekracza 0,005 Hz, co zgadza się z wynikami badań symulacyjnych przeprowadzonych w rozdziale 5.5. W momencie przejściowym pomiędzy dwoma początkowymi fazami występują zakłócenia dynamiczne dla charakterystyki otrzymanej z użyciem metody 5pGMSD, ale dewiacja od wartości 50 Hz nie przekracza wartości 0,01 Hz. W drugiej fazie, gdy dodana zostaje druga harmoniczna, wartość błędu dla metody pięciopunktowej nie przekracza 0,005 Hz, podobnie jak dla etapu pierwszego. Z kolei dla metody trzypunktowej otrzymywany błąd maksymalny osiąga wartość 0,05 Hz. W trzeciej fazie dodana zostaje trzecia składowa harmoniczna, a błąd metody pięciopunktowej zostaje na podobnym poziomie. Błąd dla metody trzypunktowej



zwiększa się o mniej niż około 10%. Otrzymane rezultaty pozwalają stwierdzić, że zastosowanie metody 5pGMSD pozwala na zwiększenie dokładności pomiaru ok. 10 razy w przypadku obecności drugiej harmonicznej w sygnale.

Złożoność obliczeniowa dla praktycznej implementacji formuły metody pięciopunktowej oceniona została z użyciem pomiaru liczby cykli procesora, które są potrzebne do implementacji na wybranej platformie sprzętowej. W proponowanym systemie pomiar częstotliwości jest wykonywany z częstotliwością  $f_e = 667$  Hz. Częstotliwość pracy rdzenia jest ustawiona na 216 MHz, co przekłada się na 324,000 dostępnych cykli, które mogą być wykorzystane do estymacji. Obliczenia algorytmu FFT dla  $N = 1024$  próbek zajęły 78,800 cykli (24%); koszt obliczeniowy metody pięciopunktowej 5pGMSD wyniósł 20,132 cykli (6,21%); metody trzypunktowej 3pGMSD 4295 cykli (1,33%); nałożenie okna, obsługa pamięci i inne zadania zajęły 45,253 cykli (14%). Pozostały czas procesora stanowią cykle niewykorzystane (54%). Całkowity koszt obliczeniowy w innych systemach może być zredukowany przez użycie szybszych pamięci typu cache, zamiast tańszej pamięci flash, która została wykorzystana w opisywanym systemie. Jednak stosunek między liczbą cykli wykorzystanych na operacje związane z obliczeniami metody 5pGMSD a obliczeniami metody 3pGMSD pozostanie zachowany w każdym systemie. Metoda pięciopunktowa jest wyraźnie wolniejsza od metody trzypunktowej, jednak nadal stanowi jedynie ułamek kosztu związanego z obliczeniami FFT. Jeśli w danym systemie zajdzie potrzeba wykorzystania wielu formuł interpolacyjnych wykorzystujących okna GMSD, to duża część obliczeń może zostać wykonana tylko raz, np. w przypadku estymacji wykorzystującej różne wartości parametru  $b$  dla formuły pięciopunktowej.

# Rozdział 6

## Podsumowanie

Metody interpolacji widma w ostatnich latach stają się coraz bardziej popularną grupą metod estymacji częstotliwości. Towarzyszy temu wzmożony rozwój tej dziedziny, z rosnącą liczbą nowo powstających metod oraz rosnącą liczbą modyfikacji metod już istniejących. Taki wyraźny trend jest spowodowany przede wszystkim pożądanymi właściwościami metod interpolacji widma, tj. prostotą implementacji, niskim kosztem obliczeniowym oraz wysoką dokładnością estymacji. O rosnącej popularności świadczy rosnąca liczba powiązanych publikacji (dwukrotny wzrost z poziomu poniżej 1000 publikacji w roku 2010 do poziomu powyżej 2000 publikacji w roku 2022 wg. portalu *dimensions.ai*) oraz rosnąca liczba obszarów zastosowań metod interpolacji widma, dla których proponowane są nowe metody [34], [36], [42], [103], [104], [110], [138], [151], [168]. Jednym z głównych wyzwań związanych z metodami interpolacji widma jest ograniczenie wpływu na dokładność estymacji obecności składowych zakłócających występujących w estymowanym sygnale. Są to m. in. składowa sprzężona oraz składowe harmoniczne, które mogą mieć silny wpływ na uzyskiwaną wartość estymowanego parametru, w szczególności gdy czas trwania pomiaru jest krótki. Dlatego ważnym kierunkiem w rozwoju metod interpolacji widma jest rozwój technik pozwalających na uwzględnienie zjawiska przecieku widma pochodzącego od innych składowych.

W niniejszej rozprawie zostały zaprezentowane nowe metody interpolacji widma DFT, które oferują bezpośrednią kompensację wpływu składowych widmowych, pozwalając tym samym na dokładną estymację częstotliwości nawet dla krótkich czasów pomiaru. W rozprawie zostały przedstawione wyniki badań nad wykorzystaniem uogólnionej postaci okien czasowych maksymalnego opadania listków bocznych GMSD do uzyskania nowej rodziny metod. Uzyskane zostały trzy nowe metody realizujące kompensację wpływu obecności składowych zakłócających bezpośrednio przez formułę interpolacyjną. Nowe metody cechują się wykorzystaniem okien GMSD do eliminacji wpływu składowych oddalonych, bezpośrednią kompensacją wpływu składowej sprzężonej oraz kompensacją wpływu rzeczywistej składowej harmonicznej. Praca zawiera opis sposobu uzyskania równań nowej klasy metod, weryfikację ich poprawności z wykorzystaniem badań symulacyjnych i eksperymentu oraz porównanie z dostępnymi metodami estymacji częstotliwości.

Użyteczność zastosowania oryginalnych rozwiązań proponowanych przez autora (w postaci nowych metod interpolacji widma) została uzasadniona przez zestawienie z aktualnym stanem wiedzy w rozpatrywanej dziedzinie (rozdziały 2 i 3) oraz przez badania symulacyjne oraz eksperymentalne (rozdział 5). W szczególności rozdziały 3.4-3.8 zawierają jakościową analizę istniejących metod ze względu na wykorzystywane dotychczas techniki kompensacji wpływu przecieku widma w interpolacji. Rozdział 3.8 zawiera

porównanie nowych metod wraz z metodami omawianymi wcześniej ze względu na ich najważniejsze cechy.

Wybrane wyniki dotyczące metod interpolacji widma z wykorzystaniem okien GMSD, zawarte w niniejszej rozprawie, zostały już przedstawione w publikacjach z udziałem autora (dodatek A), a niniejsza rozprawa zawiera zarówno ich opis w formie rozszerzonej, jak i nowe oryginalne wyniki, będące efektem dalszych prac badawczych autora niniejszej rozprawy. Wspomniane publikacje dotyczą:

- opracowania nowej metody trzypunktowej 3pGMSD[37] (równanie (4.42)),
- analizy błędów metody trzypunktowej 3pGMSD [51], [52],
- opracowania nowej metody pięciopunktowej 5pGMSD (równanie (4.76)) [123].

Zawartość niniejszej rozprawy wzbogacona jest ponadto o oryginalne, niepublikowane jeszcze wyniki, w zakresie modelowania matematycznego widma z wykorzystaniem okien GMSD wraz z weryfikacją poprawności uzyskanych modeli poprzez wykonanie badań symulacyjnych i eksperymentalnych. W zakresie modelowania matematycznego do najważniejszych autorskich wyników można zaliczyć:

- opracowanie założeń sposobu wyprowadzenia metod wykorzystujących aproksymację charakterystyki częstotliwościowej okna czasowego GMSD (równanie (4.2)),
- opracowanie metody dwupunktowej 2pGMSD wykorzystującej formuły interpolacyjne (4.14) oraz (4.15),
- pełne analityczne wyprowadzenie metody trzypunktowej 3pGMSD (w odróżnieniu do wyprowadzenia z pracy [37], w której zastosowano metodę heurystyczną przy wyprowadzeniu, rozdział 4.4),
- wersja uogólniona estymatora trzypunktowego 3pGMSD, która pozwala na uwzględnienie wpływu dwóch dowolnych oscylacji zespolonych o wybranych krotnościach częstotliwości podstawowej  $\lambda_0$  (równanie 4.37), w kontraście do dostępnego w literaturze równania (4.42) [37],
- pełne analityczne wyprowadzenie metody pięciopunktowej 5pGMSD (rozdział 4.5).

Najważniejszym aspektem wprowadzonych metod interpolacji widma jest to, że dostarczają one bezpośrednią algebraiczną i nieiteracyjną formułę estymatora, sparametryzowaną ze względu na żądane cechy metody. Rozszerzony zakres wartości parametru okna GMSD w porównaniu do okien MSD pozwala na elastyczny dobór wartości parametru okna adekwatnej do zastosowania. Opis sposobu wdrożenia zaproponowanych metod interpolacji widma w praktycznym systemie umieszczony jest na końcu rozdziału 4 w postaci opisu algorytmu na przykładzie metody pięciopunktowej (algorytm 1).

W rozdziale 5 opisane zostały wyniki weryfikacji poprawności działania oraz analiza dokładności estymacji częstotliwości uzyskanych metod z wykorzystaniem badań symulacyjnych oraz eksperymentu. Uzyskane wyniki prezentowane są w postaci wykresów charakterystyk błędu RMSE dla przypadku sygnału bez zakłóceń losowych w celu zbadania obciążenia estymatorów oraz dla przypadku sygnałów zawierających szum AWGN do oceny wkładu wariancji w błędzie całkowitym estymatora. Przeprowadzone badania

wskazały zakres parametrów metody oraz sygnału wejściowego, dla których proponowane metody pozwalają na obniżenie wartości błędu estymacji przez ograniczenie obciążenia wynikającego z obecności składowych zakłócających. Badania poświęcone metodzie dwupunktowej 2pGMSD (rozdział 5.3) wykazały, że:

- błąd systematyczny metody 2pGMSD, wynikający z przyjętego sposobu modelowania, może być ograniczony z wykorzystaniem odpowiednich wartości parametru okna  $p$  i liczby próbek  $N$ , nawet poniżej poziomu  $10^{-10}$  bin (rysunki 5.1-5.2). Uzyskanie tak wysokiej dokładności w badaniach symulacyjnych ma przede wszystkim duże znaczenie dla przeprowadzonego modelowania matematycznego (do weryfikacji poprawności uzyskanych równań oraz wyznaczenia podstawowych właściwości metody); natomiast uzyskanie błędu na poziomie  $10^{-10}$  bin jest w praktyce nieosiągalne w rzeczywistym systemie pomiarowym ze względu na obecność szumu i innych zakłóceń w sygnale.
- Wykorzystanie okien czasowych GMSD w interpolacji pozwala na efektywne ograniczenie wartości obciążenia związanego z wpływem obecności oddalonych składowych zakłócających, gdzie już dla wartości parametru  $p = 2$  i większych uzyskano estymator redukujący składnik obciążenia znacznie poniżej poziomu wariancji dla wszystkich badanych wartości parametrów i  $\text{SNR} < 100$  dB. Należy jednocześnie pamiętać, że zwiększenie wartości parametru  $p$  wiąże się ze wzrostem wariancji estymatora. Dla najlepszego przypadku  $p = 2$  uzyskana wartość błędu całkowitego jest ok. 3 raza większa względem wartości ograniczenia Craméra-Rao (rysunki 5.3-5.4).
- Porównanie metody dwupunktowej 2pGMSD z nowoczesną metodą tej samej klasy, tj. metodą Lianga i in. [113] pokazało ponadto, że metoda 2pGMSD pozwala na uzyskanie lepszej dokładności nawet do trzech rzędów wielkości w przypadku obecności składowych zakłócających dla czasów pomiaru odpowiadającym  $\lambda_0 > 6$  bin, tj. składowej sprzężonej, pojedynczej składowej harmonicznej lub wielu składowych harmonicznych (rysunki 5.6-5.9), co bezpośrednio wynika z możliwości zastosowania okien czasowych GMSD.

Wnioski dotyczące ograniczenia błędu systematycznego wynikającego z użytych przybliżeń w wyprowadzeniu oraz ograniczenia obciążenia wynikającego z wpływu obecności składowych oddalonych za pomocą okien GMSD mają zastosowanie także dla metod 3pGMSD i 5pGMSD. Badania poświęcone metodzie trzypunktowej 3pGMSD (rozdział 5.4) wykazały ponadto, że:

- eliminacja obciążenia wynikającego z obecności składowej sprzężonej na wynik pomiaru może być efektywnie realizowana za pomocą estymatora trzypunktowego 3pGMSD, o czym świadczy otrzymanie poziomu błędu nawet poniżej  $10^{-10}$  bin (rysunek 5.10), co pozwala na potwierdzenie poprawności użytego modelowania. Podobnie jak w przypadku metody 2pGMSD należy zauważyć, że uzyskanie zbliżonej dokładności w rzeczywistym systemie pomiarowym jest bardzo trudne ze względu na występujące zakłócenia.
- Obciążenie estymatora 3pGMSD wynikające z przyjętego sposobu modelowania sygnału może być efektywnie ograniczone przez zwiększenie wartości parametrów  $N$  i  $p$ , przykładowo z poziomu ok.  $10^{-3}$  bin dla  $N = 32$  i  $p = 1$  do poziomu

poniżej  $10^{-10}$  bin dla  $N = 512$  i  $p = 2$  (rysunki 5.11-5.12). Podobnie jak dla metody 2pGMSD, zwiększenie wartości parametru  $p$  okna wiąże się ze zwiększeniem wariancji, przykładowo przy ograniczeniu wartości obciążenia znacznie poniżej wariancji przez użycie wartości  $p = 2$  otrzymano poziom błędu całkowitego ok. 3 razy większy od ograniczenia Craméra-Rao (rysunki 5.13-5.14).

- Porównanie trzypunktowej metody 3pGMSD z nowoczesną metodą bezpośrednią Wanga i in. [170] tej samej klasy (uwzględniającą wpływ składowej sprzężonej w interpolacji) wskazało na zakres parametrów pomiaru, dla których zastosowanie metody 3pGMSD pozwala na zwiększenie dokładności pomiaru (rysunki 5.15-5.19). Ze względu na analityczne wyprowadzenie równań, metoda Wanga pozwala na eliminację obciążenia w przypadku małej liczby próbek sygnału  $N$  i okna prostokątnego, przykładowo dla  $N = 256$  uzyskiwane obciążenie przyjmuje poziom poniżej  $10^{-10}$  bin, co odpowiada wykorzystaniu parametru  $p = 5$  dla metody 3pGMSD (rysunek 5.15). Jednocześnie wykorzystanie większych wartości parametru okna  $p$  wiąże się ze znaczącym wzrostem wariancji, przykładowo z poziomu ok. 2,3 raza względem ograniczenia Craméra-Rao i  $p = 0$  do poziomu ok. 3,7 raza dla  $p = 3$  (rysunek 5.15).

Możliwość wykorzystania wyłącznie okna prostokątnego w metodzie Wanga (i jej podobnych) ogranicza przydatność jej użycia dla przypadku obecności składowych zakłócających w sygnale, przykładowo metoda 3pGMSD pozwoliła na uzyskanie co najmniej 10-krotnie lepszej dokładności pomiaru dla zakresu parametrów  $\lambda_0 > 3$  bin oraz  $\text{SNR} > 30$  dB kolejno dla: drugiej składowej harmonicznej, trzeciej harmonicznej i wielu harmonicznych obecnych w sygnale (rysunki 5.16-5.19).

Wnioski dotyczące ograniczenia wpływu obecności składowej sprzężonej na dokładność pomiaru mają zastosowanie także dla metody 5pGMSD. Badania poświęcone metodzie pięciopunktowej 5pGMSD (rozdział 5.5) wykazały ponadto, że:

- jednoczesna eliminacja obciążenia związanego z obecnością składowej sprzężonej oraz pojedynczej bliskiej składowej harmonicznej może być efektywnie realizowana za pomocą estymatora 5pGMSD nawet do poziomu poniżej  $10^{-10}$  bin (rysunek 5.20). Tutaj także należy nadmienić (jak to było w przypadku metod 2pGMSD i 3pGMSD), że uzyskana wysoka dokładność pozwala na potwierdzenie poprawności zastosowanego modelowania dla interpolacji metody pięciopunktowej, jednak uzyskanie zbliżonej dokładności w praktycznym systemie pomiarowym jest bardzo trudne.
- W badaniach określone zostały warunki, dla których dominuje obciążenie związane z obecnością składowych zakłócających, a zastosowanie metody pięciopunktowej 5pGMSD pozwala na zredukowanie błędu całkowitego estymacji (rysunki 5.21-5.34). Przy dobrze dobranej wartości parametru  $b$  otrzymane wyniki są zbieżne do wyników badań metod 2pGMSD i 3pGMSD w analogicznych sytuacjach: obciążenie estymatora 5pGMSD w przypadku występowania pojedynczej harmonicznej może być zredukowane poniżej poziomu  $10^{-10}$  bin dla parametrów  $N > 512$  i  $p > 2$  (rysunki 5.21-5.28); w przypadku ograniczenia obciążenia znacznie poniżej poziomu wariancji przez użycie parametru okna  $p = 2$ , dla zakresu  $\text{SNR} < 100$  dB otrzymano wartość błędu całkowitego na poziomie ok. 3 raza wartości ograniczenia Craméra-Rao dla eliminacji drugiej harmonicznej i ok. 3,5 raza dla eliminacji trzeciej harmonicznej (rysunki 5.29-5.32). Badania pokazały także, że użycie metody

pięciopunktowej wiąże się ze zwiększoną wariancją względem metody 3pGMSD i 2pGMSD. Stąd wybór metody pięciopunktowej powinien wiązać się z rozpoznaniem czy w systemie wystąpiło zakłócenie bliską harmoniczną (np. przy pomocy wstępnej analizy harmonicznej).

- W przypadku sygnału zakłóconego wieloma harmonicznymi, druga składowa harmoniczna wywiera największy wpływ na dokładność estymacji. Dlatego zastosowanie estymatora pięciopunktowego 5pGMSD z eliminacją wpływu drugiej harmonicznej pozwala na zredukowanie błędu nawet do dwóch rzędów wielkości dla rozważanego w badaniach sygnału (rysunek 5.34).

Rozdział 5 zakończony jest opisem eksperymentu, który wskazuje na możliwość efektywnego zastosowania metody pięciopunktowej w praktycznym systemie wraz z analizą kosztów obliczeniowych proponowanej implementacji. Wyniki eksperymentu dla metody pięciopunktowej 5pGMSD wskazują na możliwość poprawy wyników nawet dziesięciokrotnie dla dynamicznie zmieniającego się charakteru zakłóceń harmonicznymi względem metody nieuwzględniającej wpływu składowej harmonicznej w interpolacji.

Przeprowadzone w niniejszej rozprawie badania nad metodami interpolacji widma, w zakresie modelowania matematycznego, weryfikacji poprawności, analizy dokładności i weryfikacji eksperymentalnej potwierdzają tezę, że: *interpolacja widma DFT z wykorzystaniem okien czasowych GMSD pozwala na uzyskanie nowych nieiteracyjnych metod estymacji częstotliwości charakteryzujących się krótkim czasem wykonania wraz ze znaczącym zwiększeniem dokładności estymacji (o rząd wielkości lub więcej) dla krótkiego czasu pomiaru i w obecności zakłóceń harmonicznymi względem dotychczasowych nieiteracyjnych metod interpolacji widma.* Przedstawiony w rozprawie sposób modelowania matematycznego widma z wykorzystaniem okien GMSD pozwolił na uzyskanie trzech nieiteracyjnych metod: dwupunktowej 2pGMSD, trzypunktowej 3pGMSD i pięciopunktowej 5pGMSD (rozdział 4). Analiza dokładności nowych metod wraz z metodami referencyjnymi wykazała, że zastosowanie okien czasowych GMSD w interpolacji widma pozwoliło na znaczące zwiększenie dokładności w przypadku obecności zakłóceń harmonicznymi nawet do kilku rzędów wielkości w szerokim zakresie parametrów sygnału (rozdział 5), w szczególności dotyczy to także sytuacji skróconego okna pomiarowego (odpowiadającemu wartościom częstotliwości unormowanej  $\lambda_0 < 4$  bin), dla której w przypadku wykorzystania metody pięciopunktowej 5pGMSD uzyskano zwiększenie dokładności powyżej jednego rzędu wielkości zarówno w przypadku badań symulacyjnych jak i eksperymentu.

# Dodatek A

## Lista publikacji autora

1. A. Matusiak, J. Borkowski i J. Mroczka, “Noniterative method for frequency estimation based on interpolated dft with low-order harmonics elimination,” *Measurement*, t. 196, s. 111–241, 2022.  
Punkty MNiSW: 200;  
Impact Factor: 5,131.
2. J. Borkowski, J. Mroczka, A. Matusiak i D. Kania, “Frequency Estimation in Interpolated Discrete Fourier Transform With Generalized Maximum Sidelobe Decay Windows for the Control of Power,” *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, t. 17, nr. 3, s. 1614–1624, 2021.  
Punkty MNiSW: 200;  
Impact Factor: 10,215.
3. J. Borkowski i A. Matusiak, “Dynamic characteristics of Interpolated-DFT-based frequency estimation method with Generalized Maximum Sidelobes Decay Windows,” w *2019 IEEE International Conference on Environment and Electrical Engineering and 2019 IEEE Industrial and Commercial Power Systems Europe (EEEIC/I&CPS Europe)*, IEEE, 2019, s. 1–4.  
Punkty MNiSW: 20.
4. J. Borkowski i A. Matusiak, “Frequency tracking with novel Interpolated-DFT-based method using Generalized Maximum Sidelobes Decay Windows,” w *2019 42nd International Conference on Telecommunications and Signal Processing (TSP)*, IEEE, 2019, s. 681–684.  
Punkty MNiSW: 20.

# Bibliografia

- [1] M. Abe i J. O. Smith III, "Design criteria for simple sinusoidal parameter estimation based on quadratic interpolation of FFT magnitude peaks," w *Audio Engineering Society Convention 117*, Audio Engineering Society, 2004.
- [2] E. Aboutanios, "Estimation of the frequency and decay factor of a decaying exponential in noise," *IEEE Transactions on Signal Processing*, t. 58, nr. 2, s. 501–509, 2009.
- [3] E. Aboutanios i B. Mulgrew, "Iterative frequency estimation by interpolation on Fourier coefficients," *IEEE Transactions on signal processing*, t. 53, nr. 4, s. 1237–1242, 2005.
- [4] K. Adamczyk i A. G. Polak, "Derivation of Frequency Components from Overnight Heart Rate Variability Using an Adaptive Variational Mode Decomposition," w *2021 43rd Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine & Biology Society (EMBC)*, IEEE, 2021, s. 647–650.
- [5] D. Agrž, "Weighted multipoint interpolated DFT to improve amplitude estimation of multifrequency signal," *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, t. 51, nr. 2, s. 287–292, 2002.
- [6] M. Aiello, A. Cataliotti i S. Nuccio, "A chirp-z transform-based synchronizer for power system measurements," *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, t. 54, nr. 3, s. 1025–1032, 2005.
- [7] G. Andria, M. Savino i A. Trotta, "Windows and interpolation algorithms to improve electrical measurement accuracy," *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, t. 38, nr. 4, s. 856–863, 1989.
- [8] A. Ashrafian, M. Mirsalim i M. A. Masoum, "An adaptive recursive wavelet based algorithm for real-time measurement of power system variables during off-nominal frequency conditions," *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, t. 14, nr. 3, s. 818–828, 2017.
- [9] G. Bai, Y. Cheng, W. Tang, S. Li i X. Lu, "Accurate frequency estimation of a real sinusoid by three new interpolators," *IEEE Access*, t. 7, s. 91 696–91 702, 2019.
- [10] P. Banerjee i S. C. Srivastava, "A subspace-based dynamic phasor estimator for synchrophasor application," *IEEE Transactions on instrumentation and measurement*, t. 61, nr. 9, s. 2436–2445, 2012.
- [11] D. Belega, "The maximum sidelobe decay windows," *Revue Roumaine des Sciences Techniques Serie Electrotechnique et Energetique*, t. 50, nr. 3, s. 349, 2005.
- [12] D. Belega i D. Dallet, "Frequency estimation via weighted multipoint interpolated DFT," *IET Science, Measurement & Technology*, t. 2, nr. 1, s. 1–8, 2008.



- [13] —, “Multifrequency signal analysis by interpolated DFT method with maximum sidelobe decay windows,” *Measurement*, t. 42, nr. 3, s. 420–426, 2009.
- [14] D. Belega, D. Dallet i D. Petri, “Accuracy of sine wave frequency estimation by multipoint interpolated DFT approach,” *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, t. 59, nr. 11, s. 2808–2815, 2010.
- [15] —, “Statistical description of the sine-wave frequency estimator provided by the interpolated DFT method,” *Measurement*, t. 45, nr. 1, s. 109–117, 2012.
- [16] D. Belega, D. Fontanelli i D. Petri, “Dynamic phasor and frequency measurements by an improved Taylor weighted least squares algorithm,” *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, t. 64, nr. 8, s. 2165–2178, 2015.
- [17] D. Belega, D. Macii i D. Petri, “Power system frequency estimation accuracy of improved DFT-based algorithms over short intervals,” w *2016 IEEE International Workshop on Applied Measurements for Power Systems (AMPS)*, IEEE, 2016, s. 1–6.
- [18] D. Belega i D. Petri, “Accuracy Analysis of an Enhanced Frequency-Domain Linear Least-Squares Algorithm,” w *2019 IEEE International Instrumentation and Measurement Technology Conference (I2MTC)*, IEEE, 2019, s. 1–5.
- [19] —, “Accuracy analysis of the multicycle synchrophasor estimator provided by the interpolated DFT algorithm,” *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, t. 62, nr. 5, s. 942–953, 2013.
- [20] —, “Accuracy of the synchrophasor estimator returned by the interpolated DFT algorithm under off-nominal frequency and harmonic conditions,” w *2018 IEEE 9th International Workshop on Applied Measurements for Power Systems (AMPS)*, IEEE, 2018, s. 1–6.
- [21] —, “Analysis of Asymptotic and Exact Cramér-Rao Lower Bounds on the Parameters of a Noisy Periodic Signals,” *Digital Signal Processing*, s. 103 961, 2023.
- [22] —, “Effect of noise and harmonics on sine-wave frequency estimation by interpolated DFT algorithms based on few observed cycles,” *Signal Processing*, t. 140, s. 207–218, 2017.
- [23] —, “Fast procedures for accurate parameter estimation of sine-waves affected by noise and harmonic distortion,” *Digital Signal Processing*, t. 114, s. 103 035, 2021.
- [24] —, “Frequency estimation by two- or three-point interpolated Fourier algorithms based on cosine windows,” *Signal Processing*, t. 117, s. 115–125, 2015.
- [25] —, “Influence of the noise on DFT-based sine-wave frequency and amplitude estimators,” *Measurement*, t. 137, s. 527–534, 2019.
- [26] —, “Sine-wave parameter estimation by interpolated DFT method based on new cosine windows with high interference rejection capability,” *Digital Signal Processing*, t. 33, s. 60–70, 2014.
- [27] D. Belega, D. Petri i D. Dallet, “Accurate frequency estimation of a noisy sine-wave by means of an interpolated discrete-time Fourier transform algorithm,” *Measurement*, t. 116, s. 685–691, 2018.

- [28] —, “Accurate sine-wave frequency estimation by means of an interpolated DTFT algorithm,” w *Proceedings of the 21st IMEKO TC4 International Symposium, Budapest, Hungary*, 2016, s. 122–127.
- [29] —, “Frequency estimation of a sinusoidal signal via a three-point interpolated DFT method with high image component interference rejection capability,” *Digital Signal Processing*, t. 24, s. 162–169, 2014.
- [30] —, “Impact of harmonics on the interpolated DFT frequency estimator,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, t. 66, s. 349–360, 2016.
- [31] L. Bernard, S. Goondram, B. Bahrani, A. A. Pantelous i R. Razzaghi, “Harmonic and interharmonic phasor estimation using matrix pencil method for phasor measurement units,” *IEEE Sensors Journal*, t. 21, nr. 2, s. 945–954, 2020.
- [32] M. Bertocco, C. Offelli i D. Petri, “Analysis of damped sinusoidal signals via a frequency-domain interpolation algorithm,” *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, t. 43, nr. 2, s. 245–250, 1994.
- [33] M. Binek, *Metody cyfrowego przetwarzania sygnałów w rozległych systemach pomiarów synchronicznych stosowanych w systemach elektroenergetycznych*. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, 2021.
- [34] B. Boashash, “Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal. I. Fundamentals,” *Proceedings of the IEEE*, t. 80, nr. 4, s. 520–538, 1992.
- [35] —, “Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal. II. Algorithms and applications,” *Proceedings of the IEEE*, t. 80, nr. 4, s. 540–568, 1992.
- [36] J. Borkowski, D. Kania i J. Mroczka, “Interpolated-DFT-Based Fast and Accurate Frequency Estimation for the Control of Power,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, t. 61, nr. 12, s. 7026–7034, 2014.
- [37] J. Borkowski, J. Mroczka, A. Matusiak i D. Kania, “Frequency Estimation in Interpolated Discrete Fourier Transform With Generalized Maximum Sidelobe Decay Windows for the Control of Power,” *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, t. 17, nr. 3, s. 1614–1624, 2021.
- [38] J. Borkowski i D. Kania, “Interpolated-DFT-Based Fast and Accurate Amplitude and Phase Estimation for the Control of Power,” *Metrology and Measurement Systems*, t. 23, nr. 1, 2016.
- [39] J. Borkowski, “LIDFT-the DFT linear interpolation method,” *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, t. 49, nr. 4, s. 741–745, 2000.
- [40] J. Borkowski i J. Mroczka, “Metrological analysis of the LIDFT method,” *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, t. 51, nr. 1, s. 67–71, 2002.
- [41] J. Borkowski, “Continuous and discontinuous linear approximation of the window spectrum by least squares method,” *Metrology and Measurement Systems*, t. 18, nr. 3, s. 379–390, 2011.
- [42] —, *Metody interpolacji widma i metoda LIDFT w estymacji parametrów sygnału wieloczęstotliwościowego*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, 2011.
- [43] —, “Minimization of maximum errors in universal approximation of the unit circle by a polygon,” *Metrology and Measurement Systems*, t. 18, nr. 3, s. 391–402, 2011.

- [44] —, “Systematic errors of the LIDFT method: Analytical form and verification by a Monte Carlo method,” *Metrology and Measurement Systems*, t. 19, nr. 4, s. 673–684, 2012.
- [45] J. Borkowski i D. Kania, “Influence of A/D quantization in a renewable energy system using Generalized Maximum Sidelobe Decay windows for the frequency estimation,” w *2019 IEEE International Conference on Environment and Electrical Engineering and 2019 IEEE Industrial and Commercial Power Systems Europe (EEEIC/I&CPS Europe)*, IEEE, 2019, s. 1–4.
- [46] —, “Influence of Harmonics on the Interpolated DFT-based Frequency Estimation for the Control of Power in Renewable Energy Systems using Generalized Maximum Sidelobe Decay Windows,” w *2019 IEEE 13th International Conference on Power Electronics and Drive Systems (PEDS)*, IEEE, 2019, s. 1–4.
- [47] —, “Simulation Comparison of Frequency Estimation Methods Applied for Power Control in Renewable Energy Systems,” w *2019 16th International Conference on Synthesis, Modeling, Analysis and Simulation Methods and Applications to Circuit Design (SMACD)*, IEEE, 2019, s. 273–276.
- [48] —, “The voltage offset in the noised signal frequency estimation for a Renewable Energy System using Generalized Maximum Sidelobe Decay windows,” w *2019 International Conference on Computing, Electronics & Communications Engineering (iCCECE)*, IEEE, 2019, s. 40–44.
- [49] J. Borkowski, D. Kania i J. Mroczka, “Comparison of sine-wave frequency estimation methods in respect of speed and accuracy for a few observed cycles distorted by noise and harmonics,” *Metrology and Measurement Systems*, t. 25, nr. 2, 2018.
- [50] —, “Influence of A/D quantization in an interpolated DFT based system of power control with a small delay,” *Metrology and Measurement Systems*, t. 21, nr. 3, 2014.
- [51] J. Borkowski i A. Matusiak, “Dynamic characteristics of Interpolated-DFT-based frequency estimation method with Generalized Maximum Sidelobes Decay Windows,” w *2019 IEEE International Conference on Environment and Electrical Engineering and 2019 IEEE Industrial and Commercial Power Systems Europe (EEEIC/I&CPS Europe)*, IEEE, 2019, s. 1–4.
- [52] —, “Frequency tracking with novel Interpolated-DFT-based method using Generalized Maximum Sidelobes Decay Windows,” w *2019 42nd International Conference on Telecommunications and Signal Processing (TSP)*, IEEE, 2019, s. 681–684.
- [53] J. Borkowski i J. Mroczka, “Influence of Noise on the Interpolated DFT-based Frequency Estimation for the Control of Power Using Generalized Maximum Sidelobe Decay Windows,” w *2019 42nd International Conference on Telecommunications and Signal Processing (TSP)*, IEEE, 2019, s. 269–272.
- [54] —, “LIDFT method with classic data windows and zero padding in multifrequency signal analysis,” *Measurement*, t. 43, nr. 10, s. 1595–1602, 2010.

- [55] ———, “Systematic Errors in the Interpolated-DFT-Based Frequency Estimation for the Control of Power Using Generalized Maximum Sidelobe Decay Windows,” w *2019 IEEE International Conference on Environment and Electrical Engineering and 2019 IEEE Industrial and Commercial Power Systems Europe (EEEIC/I&CPS Europe)*, IEEE, 2019, s. 1–4.
- [56] J. Borkowski, M. Szmajda i J. Mroczka, “The Influence of Power Network Disturbances on Short Delayed Estimation of Fundamental Frequency Based on IpDFT Method with GMSD Windows,” *Energies*, t. 14, nr. 20, s. 6465, 2021.
- [57] A. Breitenbach, “Against spectral leakage,” *Measurement*, t. 25, nr. 2, s. 135–142, 1999.
- [58] Ç. Candan, “A method for fine resolution frequency estimation from three DFT samples,” *IEEE Signal processing letters*, t. 18, nr. 6, s. 351–354, 2011.
- [59] ———, “Analysis and further improvement of fine resolution frequency estimation method from three DFT samples,” *IEEE Signal Processing Letters*, t. 20, nr. 9, s. 913–916, 2013.
- [60] ———, “Fine resolution frequency estimation from three DFT samples: Case of windowed data,” *Signal Processing*, t. 114, s. 245–250, 2015.
- [61] Y. Cao, G. Wei i F.-J. Chen, “A closed-form expanded autocorrelation method for frequency estimation of a sinusoid,” *Signal processing*, t. 92, nr. 4, s. 885–892, 2012.
- [62] K. Chan i H.-C. So, “Accurate frequency estimation for real harmonic sinusoids,” *IEEE Signal Processing Letters*, t. 11, nr. 7, s. 609–612, 2004.
- [63] J. Chaochao, S. Yixin, Z. Huajun i L. Shilin, “Power system frequency estimation based on adaptive notch filter,” w *2016 International Conference on Industrial Informatics-Computing Technology, Intelligent Technology, Industrial Information Integration (ICIICII)*, IEEE, 2016, s. 191–194.
- [64] K. F. Chen, X. Cao i Y. F. Li, “Sine wave fitting to short records initialized with the frequency retrieved from Hanning windowed FFT spectrum,” *Measurement*, t. 42, nr. 1, s. 127–135, 2009.
- [65] K. F. Chen, J. T. Jiang i S. Crowson, “Against the long-range spectral leakage of the cosine window family,” *Computer Physics Communications*, t. 180, nr. 6, s. 904–911, 2009.
- [66] Y. Chen, A. H. C. Ko, W. S. Tam, C. W. Kok i H. C. So, “Non-iterative and accurate frequency estimation of a single cisoid using two DFT coefficients,” *Digital Signal Processing: A Review Journal*, t. 98, 2020.
- [67] ———, “Non-iterative DOA estimation using discrete Fourier transform interpolation,” *IEEE Access*, t. 7, s. 55 620–55 630, 2019.
- [68] V. Choqueuse, E. Elbouchikhi i M. Benbouzid, “Maximum likelihood frequency estimation in smart grid applications,” w *2015 IEEE 24th International Symposium on Industrial Electronics (ISIE)*, IEEE, 2015, s. 1339–1344.
- [69] J. W. Cooley i J. W. Tukey, “An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series,” *Mathematics of computation*, t. 19, nr. 90, s. 297–301, 1965.

- [70] P. Dash, A. Pradhan i G. Panda, “Frequency estimation of distorted power system signals using extended complex Kalman filter,” *IEEE Transactions on Power Delivery*, t. 14, nr. 3, s. 761–766, 1999.
- [71] P. Dash, D. Swain, A. Routray i A. Liew, “An adaptive neural network approach for the estimation of power system frequency,” *Electric power systems research*, t. 41, nr. 3, s. 203–210, 1997.
- [72] A. Derviškić, P. Romano i M. Paolone, “Iterative-Interpolated DFT for Synchronphasor Estimation: A Single Algorithm for P- and M-Class Compliant PMUs,” *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, t. 67, nr. 3, s. 547–558, 2018.
- [73] E. Dilaveroglu, “Nonmatrix Cramér-Rao bound expressions for high-resolution frequency estimators,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, t. 46, nr. 2, s. 463–474, 1998.
- [74] S. Djukanović i V. Popović-Bugarin, “Efficient and accurate detection and frequency estimation of multiple sinusoids,” *IEEE Access*, t. 7, s. 1118–1125, 2018.
- [75] S. Djukanović, T. Popović i A. Mitrović, “Precise sinusoid frequency estimation based on parabolic interpolation,” w *2016 24th Telecommunications Forum (TELFOR)*, IEEE, 2016, s. 1–4.
- [76] Z. D. Drummond, K. E. Claytor, D. R. Allee i D. M. Hull, “An optimized subspace-based approach to synchronphasor estimation,” *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, t. 70, s. 1–13, 2020.
- [77] K. Duda, T. P. Zieliński, A. Bień i S. H. Barczentewicz, “Harmonic Phasor Estimation With Flat-Top FIR Filter,” *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, t. 69, nr. 5, s. 2039–2047, 2020.
- [78] K. Duda, “DFT interpolation algorithm for Kaiser–Bessel and Dolph–Chebyshev windows,” *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, t. 60, nr. 3, s. 784–790, 2011.
- [79] K. Duda i S. Barczentewicz, “Interpolated DFT for  $\sin^\alpha(x)$  Windows,” *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, t. 63, nr. 4, s. 754–760, 2014.
- [80] K. Duda i T. P. Zieliński, “The Polyphase Prony Method [Tips & Tricks],” *IEEE Signal Processing Magazine*, t. 39, nr. 3, s. 115–120, 2022.
- [81] L. Fan i G. Qi, “Frequency estimator of sinusoid based on interpolation of three DFT spectral lines,” *Signal Processing*, t. 144, s. 52–60, 2018.
- [82] L. Fan, G. Qi, J. Liu, J. Jin, L. Liu i J. Xing, “Frequency estimator of sinusoid by interpolated DFT method based on maximum sidelobe decay windows,” *Signal Processing*, t. 186, s. 108–125, 2021.
- [83] L. Fang, D. Duan i L. Yang, “A new DFT-based frequency estimator for single-tone complex sinusoidal signals,” w *MILCOM 2012-2012 IEEE Military Communications Conference*, IEEE, 2012, s. 1–6.
- [84] R. Ferrero, P. A. Pegoraro i S. Toscani, “Proposals and analysis of space vector-based phase-locked-loop techniques for synchronphasor, frequency, and ROCOF measurements,” *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, t. 69, nr. 5, s. 2345–2354, 2020.

- [85] V. Friedman, "A zero crossing algorithm for the estimation of the frequency of a single sinusoid in white noise," *IEEE Transactions on Signal Processing*, t. 42, nr. 6, s. 1565–1569, 1994.
- [86] G. Frigo, A. Derviškadić i M. Paolone, "Reduced leakage synchrophasor estimation: Hilbert transform plus interpolated DFT," *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, t. 68, nr. 10, s. 3468–3483, 2018.
- [87] T. Grandke, "Interpolation algorithms for discrete Fourier transforms of weighted signals," *IEEE transactions on instrumentation and measurement*, t. 32, nr. 2, s. 350–355, 1983.
- [88] P. Guillaume, J. Schoukens i R. Pintelon, "Sensitivity of roots to errors in the coefficient of polynomials obtained by frequency-domain estimation methods," *IEEE transactions on instrumentation and measurement*, t. 38, nr. 6, s. 1050–1056, 1989.
- [89] D. Halbwachs, P. Wira i J. Mercklé, "Adaline-based approaches for time-varying frequency estimation in power systems," *IFAC Proceedings Volumes*, t. 42, nr. 19, s. 31–36, 2009.
- [90] Y. Hua i T. K. Sarkar, "Matrix pencil method for estimating parameters of exponentially damped/undamped sinusoids in noise," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, t. 38, nr. 5, s. 814–824, 1990.
- [91] "IEEE Standard for Synchrophasor Measurements for Power Systems," *IEEE Std C37.118.1-2011 (Revision of IEEE Std C37.118-2005)*, s. 1–61, 2011.
- [92] S. Ishibashi, S. Koshita, M. Abe i M. Kawamata, "DSP implementation of adaptive notch filters with overflow avoidance in fixed-point arithmetic," w *2018 Asia-Pacific Signal and Information Processing Association Annual Summit and Conference (APSIPA ASC)*, IEEE, 2018, s. 1355–1360.
- [93] E. Jacobsen i P. Kootsookos, "Fast, accurate frequency estimators [DSP Tips & Tricks]," *IEEE Signal Processing Magazine*, t. 24, nr. 3, s. 123–125, 2007.
- [94] V. K. Jain, W. L. Collins i D. C. Davis, "High-accuracy analog measurements via interpolated FFT," *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, t. 28, nr. 2, s. 113–122, 1979.
- [95] T. Jin i W. Zhang, "A novel interpolated DFT synchrophasor estimation algorithm with an optimized combined cosine self-convolution window," *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, t. 70, s. 1–10, 2020.
- [96] D. Kania, "Errors in the estimation method for the rejection of vibrations in adaptive optics systems," w *Modeling Aspects in Optical Metrology VI*, SPIE, t. 10330, 2017, s. 445–452.
- [97] ———, "Estimation of the sinusoidal oscillation parameters in the adaptive optics system based on the example of the photovoltaic system," w *Integrated Optics: Physics and Simulations II*, International Society for Optics i Photonics, t. 9516, 2015, s. 951 614.
- [98] ———, "Influence of A/D quantization in a renewable energy system using a DFT based estimation of grid signal parameters," w *2015 IEEE 15th International Conference on Environment and Electrical Engineering (EEEIC)*, IEEE, 2015, s. 1874–1879.

- [99] —, “Removing damped sinusoidal vibrations in adaptive optics systems using a DFT-based estimation method,” w *Modeling Aspects in Optical Metrology VI*, International Society for Optics i Photonics, t. 10330, 2017, s. 1 033 020.
- [100] D. Kania i J. Borkowski, “Fast and accurate estimation of multifrequency signals with noise and harmonics in control of photovoltaic systems,” *The Journal of Engineering*, t. 2019, nr. 18, s. 5163–5166, 2019.
- [101] D. Kania i J. Borkowski, “Estimation methods of multifrequency signals with noise and harmonics for PV systems with a DSP processor,” w *2017 40th International Conference on Telecommunications and Signal Processing (TSP)*, IEEE, 2017, s. 524–527.
- [102] —, “Influence of A/D quantization in the fast and accurate grid signal estimation for a PV system using I class Rife-Vincent time windows,” w *2017 IEEE International Conference on Environment and Electrical Engineering and 2017 IEEE Industrial and Commercial Power Systems Europe (EEEIC/I&CPS Europe)*, IEEE, 2017, s. 1–4.
- [103] —, “Influence of noise on the estimation method to reject damped sinusoidal vibrations in adaptive optics systems,” w *Optics, Photonics, and Digital Technologies for Imaging Applications V*, SPIE, t. 10679, 2018, s. 328–335.
- [104] —, “The rejection of vibrations in adaptive optics systems using a DFT-based estimation method,” w *Optics, Photonics and Digital Technologies for Imaging Applications IV*, SPIE, t. 9896, 2016, s. 313–320.
- [105] D. Kania, J. Borkowski i J. Mroczka, “Frequency Estimation of Multifrequency Signals Based on the 3-Point and 4-Point Spectrum Interpolation for Short Measurement Time in PV Systems,” w *2018 IEEE International Conference on Environment and Electrical Engineering and 2018 IEEE Industrial and Commercial Power Systems Europe (EEEIC/I&CPS Europe)*, IEEE, 2018, s. 1–4.
- [106] —, “Influence of Noise on Multifrequency Signals for the Amplitude and Phase Estimation in Photovoltaic Systems with a DSP Processor,” w *2018 41st International Conference on Telecommunications and Signal Processing (TSP)*, IEEE, 2018, s. 1–4.
- [107] S. Kay, “Accurate frequency estimation at low signal-to-noise ratio,” *IEEE transactions on acoustics, speech, and signal processing*, t. 32, nr. 3, s. 540–547, 1984.
- [108] S. M. Kay, *Fundamentals of statistical signal processing: estimation theory*. Prentice-Hall, Inc., 1993.
- [109] S. Koshita, Y. Noguchi, M. Abe i M. Kawamata, “Analysis of frequency estimation MSE for all-pass-based adaptive IIR notch filters with normalized lattice structure,” *Signal Processing*, t. 132, s. 85–95, 2017.
- [110] P. Krzyk, M. Sułowicz i N. Pragłowska-Ryłko, “Zastosowanie IpDFT do diagnostyki silników asynchronicznych,” *Zeszyty Problemowe–Maszyny Elektryczne*, t. 3, s. 293–300, 2014.
- [111] Z. Leonowicz, “Widma, ocena dokładności parametrycznych metod estymacji,” *XXIX konferencja IC-SPETO, PAN*, t. 24, nr. 27, s. 05, 2006.
- [112] Y. F. Li i K. F. Chen, “Eliminating the picket fence effect of the fast Fourier transform,” *Computer Physics Communications*, t. 178, nr. 7, s. 486–491, 2008.

- [113] X. Liang, A. Liu, X. Pan, Q. Zhang i F. Chen, “A New and Accurate Estimator With Analytical Expression for Frequency Estimation,” *IEEE Communications Letters*, t. 20, nr. 1, s. 105–108, 2016.
- [114] J.-R. Liao i C.-M. Chen, “Phase correction of discrete Fourier transform coefficients to reduce frequency estimation bias of single tone complex sinusoid,” *Signal processing*, t. 94, s. 108–117, 2014.
- [115] J.-R. Liao i S. Lo, “Analytical solutions for frequency estimators by interpolation of DFT coefficients,” *Signal Processing*, t. 100, s. 93–100, 2014.
- [116] C. Liguori, A. Paolillo i A. Pignotti, “Estimation of signal parameters in the frequency domain in the presence of harmonic interference: A comparative analysis,” *IEEE transactions on instrumentation and measurement*, t. 55, nr. 2, s. 562–569, 2006.
- [117] N. Liu, L. Fan, H. Wu, J. Jin, J. Xing i Z. Liu, “DFT-Based Frequency Estimation of Multiple Sinusoids,” *IEEE Access*, t. 10, s. 40 230–40 236, 2022.
- [118] Y. Liu, Z. Nie, Z. Zhao i Q. H. Liu, “Generalization of iterative Fourier interpolation algorithms for single frequency estimation,” *Digital Signal Processing*, t. 21, nr. 1, s. 141–149, 2011.
- [119] K. W. K. Lui i H. C. So, “Modified Pisarenko harmonic decomposition for single-tone frequency estimation,” *IEEE Transactions on Signal processing*, t. 56, nr. 7, s. 3351–3356, 2008.
- [120] T. Łobos i J. Rezmer, “Spectral estimation of distorted signals using prony method,” *Przegląd Elektrotechniczny*, t. 79, nr. 10, s. 735–738, 2003.
- [121] D. Macii, D. Petri i A. Zorat, “Accuracy analysis and enhancement of DFT-based synchrophasor estimators in off-nominal conditions,” *IEEE transactions on Instrumentation and Measurement*, t. 61, nr. 10, s. 2653–2664, 2012.
- [122] M. D. Macleod, “Fast nearly ML estimation of the parameters of real or complex single tones or resolved multiple tones,” *IEEE Transactions on Signal processing*, t. 46, nr. 1, s. 141–148, 1998.
- [123] A. Matusiak, J. Borkowski i J. Mroczka, “Noniterative method for frequency estimation based on interpolated dft with low-order harmonics elimination,” *Measurement*, t. 196, s. 111 241, 2022.
- [124] M. McKeown, “FFT Implementation on the TMS320VC5505, TMS320C5505, and TMS320C5515 DSPs,” *Texas Instruments Incorporated, White Paper SPRABB6B*, 2010.
- [125] Q. Miao, L. Cong i M. Pecht, “Identification of multiple characteristic components with high accuracy and resolution using the zoom interpolated discrete Fourier transform,” *Measurement science and technology*, t. 22, nr. 5, s. 055 701, 2011.
- [126] S. Minhas i E. Aboutanios, “Estimation of the frequency of a complex exponential,” w *2008 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, IEEE, 2008, s. 3693–3696.
- [127] M. Mojiri i A. R. Bakhshai, “An adaptive notch filter for frequency estimation of a periodic signal,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, t. 49, nr. 2, s. 314–318, 2004.



- [128] M. Morelli, M. Moretti i A. A. D'Amico, "Single-Tone Frequency Estimation by Weighted Least-Squares Interpolation of Fourier Coefficients," *IEEE Transactions on Communications*, t. 70, nr. 1, s. 526–537, 2022.
- [129] A. Moriat, *System and method for estimating tones in an input signal*, US Patent 6,965,068, 2005.
- [130] A. Nehorai, "A minimal parameter adaptive notch filter with constrained poles and zeros," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, t. 33, nr. 4, s. 983–996, 1985.
- [131] J. A. de la O Serna, "Synchrophasor estimation using Prony's method," *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, t. 62, nr. 8, s. 2119–2128, 2013.
- [132] C. Offelli i D. Petri, "A frequency-domain procedure for accurate real-time signal parameter measurement," *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, t. 39, nr. 2, s. 363–368, 1990.
- [133] C. Offelli i D. Petri, "The influence of windowing on the accuracy of multifrequency signal parameter estimation," *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, t. 41, nr. 2, s. 256–261, 1992.
- [134] ———, "Weighting effect on the discrete time Fourier transform of noisy signals," *IEEE transactions on instrumentation and measurement*, t. 40, nr. 6, s. 972–981, 1991.
- [135] A. V. Oppenheim, J. R. Buck i R. W. Schafer, *Discrete-time signal processing. Vol. 2*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2001.
- [136] U. Orguner i Ç. Candan, "A fine-resolution frequency estimator using an arbitrary number of DFT coefficients," *Signal processing*, t. 105, s. 17–21, 2014.
- [137] A. Ortega i F. Milano, "Comparison of different PLL implementations for frequency estimation and control," w *2018 18th International Conference on Harmonics and Quality of Power (ICHQP)*, IEEE, 2018, s. 1–6.
- [138] M. Pandit i R. Sodhi, "Synchrophasor Estimation: Review, Limitations and Future Trends," w *2022 IEEE International Conference on Power Systems Technology (POWERCON)*, IEEE, 2022, s. 1–6.
- [139] J. P. Paplinski i A. Cariow, "Fast 10-Point DFT Algorithm for Power System Harmonic Analysis," *Applied Sciences*, t. 11, nr. 15, s. 7007, 2021.
- [140] E. Pawłowski, "Power Grid Frequency Estimation Based on Zero Crossing Technique Using Least Squares Method to Approximate Sampled Voltage Signal Around Zero Level," w *Methods and Techniques of Signal Processing in Physical Measurements*, Springer, 2019, s. 248–268.
- [141] D. Petri, D. Fontanelli i D. Macii, "A frequency-domain algorithm for dynamic synchrophasor and frequency estimation," *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, t. 63, nr. 10, s. 2330–2340, 2014.
- [142] V. F. Pisarenko, "The retrieval of harmonics from a covariance function," *Geophysical Journal International*, t. 33, nr. 3, s. 347–366, 1973.
- [143] M. A. Platas-Garza, J. Platas-Garza i J. A. de la O Serna, "Dynamic phasor and frequency estimates through maximally flat differentiators," *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, t. 59, nr. 7, s. 1803–1811, 2009.

- [144] B. G. Quinn, “Estimating frequency by interpolation using Fourier coefficients,” *IEEE transactions on Signal Processing*, t. 42, nr. 5, s. 1264–1268, 1994.
- [145] ———, “Estimation of frequency, amplitude, and phase from the DFT of a time series,” *IEEE transactions on Signal Processing*, t. 45, nr. 3, s. 814–817, 1997.
- [146] ———, *The Estimation and Tracking of Frequency*, 1 wyd., ser. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, 2001.
- [147] B. D. Rao i K. S. Hari, “Performance analysis of root-MUSIC,” *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, t. 37, nr. 12, s. 1939–1949, 1989.
- [148] H. Renders, J. Schoukens i G. Vilain, “High-accuracy spectrum analysis of sampled discrete frequency signals by analytical leakage compensation,” *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, t. 33, nr. 4, s. 287–292, 1984.
- [149] D. C. Rife i G. Vincent, “Use of the discrete Fourier transform in the measurement of frequencies and levels of tones,” *Bell System Technical Journal*, t. 49, nr. 2, s. 197–228, 1970.
- [150] D. Rife i R. Boorstyn, “Single tone parameter estimation from discrete-time observations,” *IEEE Transactions on information theory*, t. 20, nr. 5, s. 591–598, 1974.
- [151] P. Romano i M. Paolone, “Enhanced interpolated-DFT for synchrophasor estimation in FPGAs: Theory, implementation, and validation of a PMU prototype,” *IEEE Transactions on instrumentation and measurement*, t. 63, nr. 12, s. 2824–2836, 2014.
- [152] A. Routray, A. K. Pradhan i K. P. Rao, “A novel Kalman filter for frequency estimation of distorted signals in power systems,” *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, t. 51, nr. 3, s. 469–479, 2002.
- [153] R. Roy i T. Kailath, “ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques,” *IEEE Transactions on acoustics, speech, and signal processing*, t. 37, nr. 7, s. 984–995, 1989.
- [154] I. Sarkar i A. T. Fam, “The interlaced chirp Z transform,” *Signal Processing*, t. 86, nr. 9, s. 2221–2232, 2006.
- [155] T. K. Sarkar i O. Pereira, “Using the matrix pencil method to estimate the parameters of a sum of complex exponentials,” *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, t. 37, nr. 1, s. 48–55, 1995.
- [156] R. Schmidt, “Multiple emitter location and signal parameter estimation,” *IEEE transactions on antennas and propagation*, t. 34, nr. 3, s. 276–280, 1986.
- [157] J. Schoukens, R. Pintelon i H. Van Hamme, “The interpolated fast Fourier transform: A comparative study,” *IEEE Transactions on instrumentation and measurement*, t. 41, nr. 2, s. 226–232, 1992.
- [158] A. Serbes, “Fast and efficient sinusoidal frequency estimation by using the DFT coefficients,” *IEEE Transactions on Communications*, t. 67, nr. 3, s. 2333–2342, 2018.
- [159] A. K. Singh i B. C. Pal, “Rate of change of frequency estimation for power systems using interpolated DFT and Kalman filter,” *IEEE Transactions on Power Systems*, t. 34, nr. 4, s. 2509–2517, 2019.

- [160] H.-C. So, F. K. Chan i W. Sun, “Efficient frequency estimation of a single real tone based on principal singular value decomposition,” *Digital Signal Processing*, t. 22, nr. 6, s. 1005–1009, 2012.
- [161] H.-C. So i K. W. Chan, “Reformulation of Pisarenko harmonic decomposition method for single-tone frequency estimation,” *IEEE Transactions on signal processing*, t. 52, nr. 4, s. 1128–1135, 2004.
- [162] J. Song, J. Zhang i H. Wen, “Accurate dynamic phasor estimation by matrix pencil and Taylor weighted least squares method,” *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, t. 70, s. 1–11, 2021.
- [163] P. Stoica i R. L. Moses, *Introduction to spectral analysis*. Pearson Education, 1997.
- [164] P. Stoica, R. L. Moses, B. Friedlander i T. Soderstrom, “Maximum likelihood estimation of the parameters of multiple sinusoids from noisy measurements,” *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, t. 37, nr. 3, s. 378–392, 1989.
- [165] J. Štremfelj i D. Agrež, “Estimation of the power quantities below one signal period using DFT coefficients,” *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, t. 68, nr. 6, s. 1696–1704, 2019.
- [166] ———, “Nonparametric estimation of power quantities in the frequency domain using Rife-Vincent windows,” *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, t. 62, nr. 8, s. 2171–2184, 2013.
- [167] J. Tabrikian, S. Dubnov i Y. Dickalov, “Maximum a-posteriori probability pitch tracking in noisy environments using harmonic model,” *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*, t. 12, nr. 1, s. 76–87, 2004.
- [168] Y. Tan, K. Wang, L. Wang i H. Wen, “Efficient FFT based multi source DOA estimation for ULA,” *Signal Processing*, t. 189, s. 108 284, 2021.
- [169] H. L. Van Trees, *Detection, estimation, and modulation theory, part I: detection, estimation, and linear modulation theory*. John Wiley & Sons, 2004.
- [170] K. Wang, H. Wen i G. Li, “Accurate Frequency Estimation by Using Three-Point Interpolated Discrete Fourier Transform Based on Rectangular Window,” *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, t. 17, nr. 1, s. 73–81, 2021.
- [171] Y. Wang, W. Wei i J. Xiang, “Multipoint interpolated DFT for sine waves in short records with DC components,” *Signal Processing*, t. 131, s. 161–170, 2017.
- [172] M. Wei, A. Zhang, L. Qi, B. Li i J. Sun, “An Efficient Frequency Estimator for a Complex Exponential Signal Based on Interpolation of Selectable DTFT Samples,” *Sensors*, t. 22, nr. 3, s. 861, 2022.
- [173] H. Wen, C. Li i L. Tang, “Novel Three-Point Interpolation DFT Method for Frequency Measurement of Sine-Wave,” *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, t. 13, nr. 5, s. 2333–2338, 2017.
- [174] H. Wen, J. Zhang, Z. Meng, S. Guo, F. Li i Y. Yang, “Harmonic Estimation Using Symmetrical Interpolation FFT Based on Triangular Self-Convolution Window,” *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, t. 11, nr. 1, s. 16–26, 2015.
- [175] Y. Xia, Y. He, K. Wang, W. Pei, Z. Blazic i D. P. Mandic, “A complex least squares enhanced smart DFT technique for power system frequency estimation,” *IEEE Transactions on Power Delivery*, t. 32, nr. 3, s. 1270–1278, 2015.

- [176] Y. Xu i B. Ju, “Synchronized phasor measuring method using recursive DFT with a window function,” w *2005 IEEE/PES Transmission & Distribution Conference & Exposition: Asia and Pacific*, IEEE, 2005, s. 1–6.
- [177] J. Yan i X. Du, “Real-time web tension prediction using web moving speed and natural vibration frequency,” *Measurement Science and Technology*, t. 31, nr. 11, s. 115 205, 2020.
- [178] C. Yang i G. Wei, “A noniterative frequency estimator with rational combination of three spectrum lines,” *IEEE transactions on Signal Processing*, t. 59, nr. 10, s. 5065–5070, 2011.
- [179] X. Yang, H. Li i K. Chen, “Optimally averaging the interpolated fast Fourier transform in both directions,” *IET science, measurement & technology*, t. 3, nr. 2, s. 137–147, 2009.
- [180] S. Ye i E. Aboutanios, “Rapid accurate frequency estimation of multiple resolved exponentials in noise,” *Signal Processing*, t. 132, s. 29–39, 2017.
- [181] S. Ye, J. Sun i E. Aboutanios, “On the estimation of the parameters of a real sinusoid in noise,” *IEEE Signal Processing Letters*, t. 24, nr. 5, s. 638–642, 2017.
- [182] R. A. Zadeh, A. Ghosh i G. Ledwich, “Combination of Kalman filter and least-error square techniques in power system,” *IEEE Transactions on Power Delivery*, t. 25, nr. 4, s. 2868–2880, 2010.
- [183] X. Zhai i B. Zhou, “Fundamental frequency estimation by an interpolated DFT algorithm eliminating negative-image component interference in arbitrary windows,” *Digital Signal Processing*, t. 127, s. 103 538, 2022.
- [184] Y. Zhang, Y. Xie, X. Li, X.-P. Zhang i J. Zhou, “Frequency Estimation for Zero-Padded Signal Based on the Amplitude Ratio of Two DFT Samples,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, t. 69, s. 6504–6514, 2021.
- [185] T. P. Zieliński, *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów: od teorii do zastosowań*. Wydawnictwa Komunikacji Łączności Warsaw, Poland, 2005.
- [186] J. Zygarlicki i J. Mroczka, “Prony’s method used for testing harmonics and interharmonos in electrical power systems,” *Metrology and Measurement Systems*, t. 19, nr. 4, s. 659–672, 2012.